(ஆ) G ஒரு தொடுத்த வரைவு எனில் $\Leftrightarrow$ $f(G,\lambda)$ வில் λ வின் குணகம் பூஜ்யம் அன்று என நிறுவுக.

Prove that a graph G is connected iff the coefficient of λ in $f(G,\lambda)$ is not zero.

Reg. No. : ....

Code No. : 20109 **Sub. Code : R 3 MA 64**

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2012.

Sixth Semester

Mathematics — Main

Paper XV — GRAPH THEORY

(For those who joined in July 2008 and afterwards)

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer :

1. எந்த (p,q) வரைவிலும்

(அ) $\delta \geq \frac{2q}{p}$

(ஆ) $\Delta \leq \frac{2q}{p}$

(இ) $\delta \leq p-1$

(ஈ) $\Delta \geq p-1$.

In any (p,q) graph

(a) $\delta \geq \frac{2q}{p}$ (b) $\Delta \leq \frac{2q}{p}$

(c) $\delta \leq p-1$ (d) $\Delta \geq p-1$.

2. எந்த (p,q) வரைவிலும்

(அ) $\alpha+\beta=q$ (ஆ) $\alpha=\beta$

(இ) $\alpha \geq \beta$ (ஈ) $\alpha+\beta=p$.

In any (p,q) graph

(a) $\alpha+\beta=q$ (b) $\alpha=\beta$

(c) $\alpha \geq \beta$ (d) $\alpha+\beta=p$.

3. பின்ருவனவற்றுள் எது சரி?

(அ) ஒற்றைப்படை எண்ணின் நீளம் கொண்ட ஒவ்வொரு நடையும் ஒரு சுற்றைக் கொண்டிருக்கும்

(ஆ) இரட்டைப் படை எண்ணின் நீளம் கொண்ட ஒவ்வொரு நடையும் ஒரு சுற்றைக் கொண்டிருக்கும்

(இ) ஒற்றைப்படை எண்ணின் நீளம் கொண்ட ஒவ்வொரு திரும்பிய நடையும் ஒரு சுற்றைக் கொண்டிருக்கும்

(ஈ) இரட்டைப்படை எண்ணின் நீளம் கொண்ட ஒவ்வொரு திரும்பிய நடையும் ஒரு சுற்றைக் கொண்டிருக்கும்.

Which of the following is true?

(a) Every walk of odd length contains a cycle

(b) Every walk of even length contains a cycle

(c) Every closed walk of odd length contains a cycle

(d) Every closed walk of even length contins a cycle.

4. பின்வருவனவற்றுள் எது சரி?

(அ) எல்லாத் தொடுத்த வரைவுகளிலும் $k=\lambda=\delta$

(ஆ) எல்லா இருபிரிவு வரைவுகளிலும் $k=\lambda=\delta$

(இ) எல்லாத் தொடுத்தது அல்லாத வரைவுகளிலும் $k=\lambda=\delta$

(ஈ) எல்லாச் சுற்றுகளிலும் $k=\lambda=\delta$.

Which of the following is true

(a) In all connected graph $k=\lambda=\delta$

(b) In all bipartite graph $k=\lambda=\delta$

(c) In all disconnected graph $k=\lambda=\delta$

(d) In all cycles $k=\lambda=\delta$.

5. ஒற்றைப்படை எண் புள்ளிகளைக் கொண்ட எந்த இருபிரிவு வரைவும்

(அ) ஆய்லீரியன்

(ஆ) ஹேமில்டோனியன்

(இ) ஆய்லீரியன் அன்று

(ஈ) ஹேமில்டோனியன் அன்று.

Any bipartile graph with odd number of verties is

(a) Eulerian (b) Hamiltonian

(c) Non Eulerian (d) Non Hamiltonian.

6. G ஒரு மரமெனில்

(அ) $q = p-1$ (ஆ) $p = q-1$

(இ) $q = p$ (ஈ) $q = p-2$.

If G is a tree, then

(a) $q = p-1$ (b) $p = q-1$

(c) $q = p$ (d) $q = p-2$.

7. மீப்பெரிய முழுமை தளவரைவானது

(அ) K_3 (ஆ) K_4

(இ) K_5 (ஈ) K_6.

The largest complete graph which is planar is

(a) K_3 (b) K_4

(c) K_5 (d) K_6.

8. G என்பது மீப்பெரிய (p, q) தளவரைவு எனில் $q =$

(அ) $3p-6$ (ஆ) $2p-6$

(இ) $3p+6$ (ஈ) $2p+6$.

If G is a maximal planar graph, $q =$

(a) $3p-6$ (b) $2p-6$

(c) $3p+6$ (d) $2p+6$.

9. T என்பது 5 புள்ளிகள் கொண்ட மரம் மற்றும் $f(T,\lambda) = \lambda^5 - k\lambda^4 + \ldots$ எனில் k இன் மதிப்பு

(அ) 2 (ஆ) 3

(இ) 4 (ஈ) −4.

If T is a tree on 5 vertices and $f(T,\lambda) = \lambda^5 - k\lambda^4 + \ldots$ then k is

(a) 2 (b) 3

(c) 4 (d) −4.

10. n புள்ளிகளைக் கொண்ட முழுமை திசை வரைவில் வில்களின் எண்ணிக்கை

(அ) $n(n-1)$ (ஆ) $\frac{n(n-1)}{2}$

(இ) $\frac{n(n-1)}{4}$ (ஈ) n^2.

The number of arc in the complete digraph on n vertices is

(a) $n(n-1)$ (b) $\frac{n(n-1)}{2}$

(c) $\frac{n(n-1)}{4}$ (d) n^2.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட நபர்களைக் கொண்ட எந்தக் குழுவிலும் அந்தக் குழுவிற்குள் சம எண்ணிக்கையில் நண்பர்களைக் கொண்ட இருவர் இருந்தே தீருவர் என நிறுவுக.

Show that in any group of two or more people, there will always be two persons with the same number of friends inside the group.

Or

(ஆ) K_p எனும் முழுமை வரைவிற்கு $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

Find $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ for the complete graph K_p.

12. (அ) $\delta \geq k$, எனில் G யில் k நீளமுள்ள பாதை ஒன்று உண்டு என நிறுவுக.

If $\delta \geq k$, prove that G has a path of length k.

Or

(ஆ) பாலம் என்றால் என்ன? எல்லாக் கோடுகளையும் பாலங்களாகக் கொண்ட வரைவிற்கு எடுத்துக்காட்டு தருக.

What is a bridge? Give an example of a graph in which every line is a bridge.

13. (அ) m, n இன் எந்த மதிப்புகளுக்கு $k_{m,n}$ ஆய்லீரியனாக இருக்கும் என ஆய்க.

For what values of m and n, $k_{m,n}$ will be Eulerian.

Or

(ஆ) ஒரு மரத்தின் மிக நீளமான பாதையின் ஆதியும் அந்தமும் ஒரு படித்தானவை எனக் காட்டுக.

Prove that the origin and terminus of a longest path in a tree have degree 1.

14. (அ) K_5 தள வரைவு அன்று என நிறுவுக.

Prove that K_5 is non-planar.

Or

(ஆ) G என்பது $p \geq 3$ எனக் கொண்ட முக்கோண மற்ற தொடுத்த தளவரைவு எனில் $q \leq 2p-1$ என நிறுவுக.

If G is a connected planar graph with $p \geq 3$ and without triangles, prove that $q \leq 2p-1$.

15. (அ) ஒரு திசை வரை Dல் எல்லாப் புள்ளிகளின் உள்படிகளின் கூடுதல், எல்லாப் புள்ளிகளில் வெளிப்படிகளின் கூடுதல் இரண்டுமே Dன் வில்ப் எண்ணிக்கைக்குச் சமமம் என நிறுவுக.

In a digraph D, prove that the sum of the indegres of all the vertices is equal to the sum of their out degrees each sum being equal to the number of arcs in D.

Or

(ஆ) V_i என்பது D எனும் திசை வரைவில் உள்ள ஒரு புள்ளி மற்றும் R அதன் சென்றடைதல் அணி என்க. $R \times R^T$ அணியின் (i, j) உறுப்பு 1 எனில் மட்டும் V_i எனும் புள்ளி V_i ஐக் கொண்டிருக்கும் D யின் வலிவான கூறில் இருக்கும் என நிறுவுக.

Let V_i be a point of a digraph D and R its reachability matrix. Prove that a point V_j lies in the strong components of D containing V_i iff the (i, j) th entry in $R \times R^T$ is 1.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) α', β' ஆகியவற்றை வரையறுக்க. $\alpha' + \beta' = p$ என நிறுவுக.

Define α', β'. Prove that $\alpha' + \beta' = p$.

Or

(ஆ) சம இயல் ஒப்புமை உடைய வரைவுகளை வரையறுக்க. சம இயல் ஒப்புமைச் சார்பு படிகளைப் பாதுகாக்கும் என நிரூபிக்க. மேலும் ஒவ்வொரு தன் நிரப்பி வரைவும் $4n$ அல்லது $4n+1$ புள்ளிகளைக் கொண்டவை என நிறுவுக.

Define isomorphic graphs. Prove that isomorphism preserves degrees. Also prove that any self complementary graph has $4n$ or $4n+1$ points.

17. (அ) (i) p புள்ளிகளைக் கொண்ட ஒரு வரைவில் $\delta \geq \frac{p-1}{2}$ எனில் அது தொடுத்த வரைவு என நிறுவுக.

(ii) புள்ளிகளின் கணம் V யை V_1, V_2 என்று எந்த விதத்தில் பிரித்தாலும் V_1 இல் உள்ள ஒரு புள்ளியையும் V_2 இல் உள்ள ஒரு புள்ளியையும் இணைக்கும் கோடு G யில் இருந்தால் மட்டுமே G ஒரு தொடுத்த வரைவு என நிறுவுக.

(i) Prove that a graph G with p points and $\delta \geq \frac{p-1}{2}$ is connected.

(ii) Prove that a graph G is connected iff for any partition of V into subsets V_1 and V_2, there is a line of G joining a point of V_1 to a point of V_2.

Or

(ஆ) G என்பது குறைந்த பட்சம் 3 புள்ளிகளைக் கொண்ட தொடுத்த வரைவு எனில் பின்வரும் கூற்றுகள் ஒன்றுக்கொன்று சமானமானவை எனக்காட்டுக.

(i) G ஒரு கட்டு

(ii) G யின் எந்த இரு புள்ளிகளும் ஒரு பொதுச் சுற்றில் அமையும்

(iii) G வரைவில் எந்தப் புள்ளியும் எந்தக் கோடும். ஒரு பொதுச் சுற்றில் அமையும்

(iv) G வரையில் எந்த இரு கோடுகளும் ஒரு பொதுச்சுற்றில் அமையும்.

If G is a connected graph with at least 3 points, prove that the following statements are equivalent :

(i) G is a block

(ii) Any two points of G lie on a common cycle

(iii) Any point and any line of G lie on a common cycle

(iv) Any two lines of G lie on a common cycle.

18. (அ) P புள்ளிகளைக் கொண்ட G எனும் வரைவில் $d(u)+d(v)\geq p$ எனக் கொண்ட அடுத்ததல்லாத புள்ளிகள் u,v ஆகியவை. $G+uv$ ஹேமில்ட்டோனியனாக இருந்தால் மட்டுமே G ஹேமில்ட்டோனியன் என நிறுவுக. மேலும் $C(G)$ ஹேமில்ட்டோனியாக இருந்தால் மட்டுமே G ஹேமில்டோனியன் என நிறுவுக.

G be a graph with p points. u,v be non adjacent points in G such that $d(u)+d(v)\geq p$. Prove that that G is Hamiltonian iff $G+uv$ is Hamitonian. Also prove that G is Hamiltonian iff $C(G)$ is Hamiltonian.

Or

(ஆ) G ஒரு (p,q) வரைவு எனில் பின்வரும் கூற்றுகள் சமமானமானவை என நிறுவுக.

(i) G ஒரு மரம்

(ii) எந்த இரு புள்ளிகளும் ஒன்றைப் பாதையினால் இணைக்கப்பட்டவை

(iii) G ஆனது $p = q + 1$ எனக்கொண்ட தொடுத்த வரைவு

(iv) G ஆனது $p = q + 1$ எனக்கொண்ட சுற்றற்ற வரைவு.

If G is a (p,q) graph, prove that the following statements are equivalent

(i) G is a tree

(ii) Every two points of G are joined by a unique parts

(iii) G is connected and $p = q + 1$

(iv) G is acyclie and $p = q + 1$.

(அ) (i) G எனும் (p,q) தளவரைவில் ஒவ்வொரு முகமும் ஒரு n சுற்று எனில் $q = \frac{n(p-2)}{n-2}$ என நிறுவுக.

(ii) r முகங்களைக் கொண்ட தொடுத்த (p,q) தள வரைவில் $(p \geq 3)$ எனில் $\frac{3r}{2} \leq q \leq 3p - 6$ என நிறுவுக.

(i) If G is a (p,q) plane graph in which every face is an n-cycle, prove that $q = \frac{n(p-2)}{n-2}$.

(ii) In any connected plane (p,q) graph $(p \geq 3)$ with r faces, prove that $\frac{3r}{2} \leq q \leq 3p - 6$.

Or

(ஆ) (i) G ஒரு $k-$ விளிம்பு வரைவு எனில் $\delta(G) \geq k - 1$ என நிறுவுக.

(ii) G ஒரு ஒரே விதத்தில் $n-$ வண்ணமிடல் வரைவு எனில் $\delta(G) \geq n - 1$ என நிறுவுக.

(i) If G is k-critical, prove that $\delta(G) \geq k - 1$

(ii) If G is uniqually n-colourable, prove that $\delta(G) \geq n - 1$.

20. (அ) G ஆனது $n \geq 2$ புள்ளிகளைக் கொண்ட மரம் எனில் $f(G,\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$ என நிறுவுக.

If G is a tree with n points, $n \geq 2$, prove that $f(G,\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$.

Or