Reg. No. : ....

Code No. : 30109 **Sub. Code : R 3 MA 64/ B 3 MA 64**

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2014.

Sixth Semester

Mathematics — Main

Paper XV — GRAPH THEORY

(For those who joined in July 2008 to 2011)

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer :

1. எந்த (p, q) வரைவிலும்

(அ) $\delta \geq \frac{2q}{p}$ (ஆ) $\Delta \leq \frac{2q}{p}$

(இ) $\delta \leq p-1$ (ஈ) $\Delta \geq p-1$.

In any (p, q) graph

(a) $\delta \geq \frac{2q}{p}$ (b) $\Delta \leq \frac{2q}{p}$

(c) $\delta \leq p-1$ (d) $\Delta \geq p-1$.

2. பீட்டர்சன் வரைவு ______________ வரைவு

(அ) (10, 15) (ஆ) (15, 10)

(இ) (5, 10) (ஈ) ஏதுமில்லை .

Peterson graph is a ______________ graph

(a) (10, 15) (b) (15, 10)

(c) (5, 10) (d) None

3. பின்வருவனவற்றுள் எது சரி?

(அ) ஒற்றைப் படை எண்ணின் நீளம் கொண்ட ஒவ்வொரு நடையும் ஒரு சுற்றைக் கொண்டிருக்கும்

(ஆ) இரட்டைப் படை எண்ணின் நீளம் கொண்ட ஒவ்வொரு நடையும் ஒரு சுற்றைக் கொண்டிருக்கும்

(இ) ஒற்றைப்படை எண்ணின் நீளம் கொண்ட ஒவ்வொரு திரும்பிய நடையும் ஒரு சுற்றைக் கொண்டிருக்கும்

(ஈ) இரட்டைப்படை எண்ணின் நீளம் கொண்ட ஒவ்வொரு திரும்பிய நடையும் ஒரு சுற்றைக் கொண்டிருக்கும்.

Which of the following is true?

(a) every walk of odd length contains a cycle

(b) every walk of even length contains a cycle

(c) every closed walk of odd length contains a cycle

(d) every closed walk of even length contains a cycle.

4. எந்த வரைவிலும்,

(அ) $k = \lambda = \delta$

(ஆ) $k \le \lambda \le \delta$

(இ) $\delta \le \lambda \le k$

(ஈ) $\delta < \lambda < k$

In any graph,

(a) $k = \lambda = \delta$

(b) $k \le \lambda \le \delta$

(c) $\delta \le \lambda \le k$

(d) $\delta < \lambda < k$

5. $k_n, n \ge 3$ ஓர் ஆய்லீரியன் வரைவு எனில்

(அ) n ஓர் ஒற்றைப்படை எண்

(ஆ) n ஓர் இரட்டைப் படை எண்

(இ) n ஒரு பகா எண்

(ஈ) n ஏதேனும் ஒரு இயல் எண்

If $k_n, n \ge 3$ is Eulerian then

(a) n is an odd number

(b) n is an even number

(c) n is a prime number

(d) n is any natural number

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

6. ஒற்றைப் படை எண் புள்ளிகளைக் கொண்ட எந்த இரு பிரிவு வரைவும்

(அ) ஆய்லீரியன்

(ஆ) ஹேமில்ட்டோனியன்

(இ) ஆய்லீரியன் அன்று

(ஈ) ஏதுமில்லை

Any bipartite graph with odd number of vertices is

(a) Eulerian (b) Hamiltonian

(c) Non Eulerian (d) None

7. மீச்சிறு தளவரைவல்லாத முழுமை வரைவு

(அ) K_3 (ஆ) K_4

(இ) K_5 (ஈ) K_6.

The smallest non-planar complete graph is

(a) K_3 (b) K_4

(c) K_5 (d) K_6.

8. G என்பது ஒவ்வொரு முகத்தையும் 3-சுற்றாகக் கொண்ட (p, q) தளவரைவு எனில் $q =$

(அ) $3p - 6$ (ஆ) $2p - 6$

(இ) $3p + 6$ (ஈ) $2p + 6$.

If G is a maximal planar graph (p, q), $q =$

(a) $3p - 6$ (b) $2p - 6$

(c) $3p + 6$ (d) $2p + 6$.

9. G ஒரு (p, q)-வரைவு மற்றும் $f(G, \lambda) = \lambda^r + s\lambda^{r-1} + \cdots$ எனில் r, s முறையே

(அ) p, q (ஆ) q, p

(இ) $p, -q$ (ஈ) $q, -p$

If G is a (p, q)-graph and $f(G, \lambda) = \lambda^r + s\lambda^{r-1} + \cdots$ then r, s are respectively

(a) p, q (b) q, p

(c) $p, -q$ (d) $q, -p$

10. n புள்ளிகளைக் கொண்ட முழுமை திசைவரைவில் வில்களின் எண்ணிக்கை

(அ) $n(n-1)$ (ஆ) $\frac{n(n-1)}{2}$

(இ) $\frac{n(n-1)}{4}$ (ஈ) n^2.

The number of arcs in the complete diagraph on n vertices is

(a) $n(n-1)$ (b) $\frac{n(n-1)}{2}$

(c) $\frac{n(n-1)}{4}$ (d) n^2.

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) எந்தவொரு வரைவிலும் அனைத்துப் புள்ளிகளின் படிகளின் கூட்டுத்தொகை கோடுகளின் எண்ணிக்கையின் இருமடங்கு என நிறுவுக.

Prove that the sum of the degrees of the points of any graph is twice the number of lines.

Or

(ஆ) ஒவ்வொரு முப்படி வரைவிலும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை இரட்டைப் படை எண் என நிரூபிக்க.

Prove that every cubic graph has an even number of vertices.

12. (அ) (5, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1,) என்பது வரைவு வரிசையா என ஆய்க. ஆம் எனில் ஒரு வரைவினை உருவாக்குக.

Check whether the sequence (5, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1) is graphical. If yes, construct a graph.

Or

(ஆ) $\Gamma(G) = \Gamma(\overline{G})$ என நிறுவுக.

Prove that $\Gamma(G) = \Gamma(\overline{G})$.

13. (அ) $\delta(G) \geq 2$ எனில் G, ஒரு சுற்றையேனும் கொண்டிருக்கும் என நிறுவுக.

If $\delta(G) \geq 2$, prove that G contains a cycle.

Or

(ஆ) ஒவ்வொரு தொடுத்த வரைவிலும் ஒரு படர் மரம் உண்டு என நிறுவுக.

Prove that every connected graph has a spanning tree.

14. (அ) ஆயிலர் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

State and prove Euler's theorem.

Or

(ஆ) எந்தவொரு k-வண்ண எண் வரைவிலும் குறைந்தபட்சம் k புள்ளிகள் குறைந்த பட்சம் $k-1$ படியைக் கொண்டிருக்கும் என நிறுவுக.

Prove that every k – chromatic graph has at least k vertices of degree at least $k-1$.

15. (அ) $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 5\lambda^2 - 1$ என்பது எந்த வரைவின் வண்ணப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகவும் இருக்க முடியாது என நிறுவுக.

Prove that $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 5\lambda^2 - 1$ cannot be the chromatic polynomial of any graph.

Or

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

(ஆ) D என்ற திசை வரைவுகளில் எல்லா புள்ளிகளும் சமமான உள்படி வெளிபடி கொண்டிருக்கின்றன என நிரூபி.

Prove that in a digraph D every points has equal indegree and outdegree.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) முக்கோணங்கள் இல்லாத P புள்ளிகள் கொண்ட ஒரு வரைவில் அதிகப்படியான கோடுகள் $\left(\frac{P^2}{4}\right)$ என நிரூபி.

Prove that the maximum number of lines in a P point graph with no triangles is $\left(\frac{P^2}{4}\right)$.

Or

(ஆ) G_1 ஒரு (p_1, q_1) வரைவு மற்றும் G_2 ஒரு (p_2, q_2) வரைவு என்க.

(i) $G_1 \cup G_2$ ஒரு $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$ வரைவு என நிரூபிக்க.

(ii) $G_1[G_2]$ ஒரு $(p_1p_2, p_1q_2 + p_2^2q_1)$ வரைவு என நிரூபிக்க.

Let G_1 be a (p_1, q_1) graph and G_2 a (p_2, q_2) graph. Prove that

(i) $G_1 \cup G_2$ is a $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$ graph.

(ii) $G_1[G_2]$ is a $(p_1p_2, p_1q_2 + p_2^2q_1)$ graph.

17. (அ) (i) $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_p$ என அமைந்த $p = (d_1, d_2, \cdots, d_p)$ என பிரிப்பு வரைவுப் பிரிப்பு எனில் $\sum_{i=1}^{p} d_i$ ஓர் இரட்டைப் படை எண் என்றும் $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{p} \min\{k, d_i\}$, $1 \leq k \leq p$ என்றும் நிறுவுக.

(ii) ஒரு $K-$சீர் இருபிரிவு வரைவின் இருபிரிவுகள் (V_1, V_2) எனில், $K > 0$ என இருக்குமானால் $|V_1| = |V_2|$ என நிறுவுக.

(i) If a partition $p = (d_1, d_2, \cdots, d_p)$ with $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_p$ is graphical, prove that $\sum_{i=1}^{p} d_i$ is even and $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{p} \min\{k, d_i\}$ for $1 \leq k \leq p$.

(ii) If G is a $K-$regular bigraph with bipartition (V_1, V_2) and $K > 0$. Prove that $|V_1| = |V_2|$.

Or

(ஆ) எந்த வரைவிலும் $K \leq \lambda \leq \delta$ நிறுவுக.

Prove that in any graph G, $K \leq \lambda \leq \delta$.

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

18. (அ) ஹேமில்ட்டோனியன் வரைவுகள் பற்றிய டிராக் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபிக்க.

State and prove Dirac's theorem on Hamiltonian graphs.

Or

(ஆ) குறைந்தது இரண்டு புள்ளிகள் உள்ள ஒரு வரை பைபார்டைட் $\Leftrightarrow$ அதிலுள்ள சுற்றுகள் அனைத்தும் இரட்டைப்படை நீளம் உள்ளவை என நிரூபிக்க.

Prove that a graph with atleast two points is bipartite $\Leftrightarrow$ all its cycles are of even length.

19. (அ) ஒவ்வொரு பன்முகியும் இருமுகங்களேனும் சம எண்ணிக்கையிலான கோடுகளைக் தங்கள் எல்லைகளில் கொண்டிருக்கும் என நிறுவுக.

Prove that every polyhedron has at least two faces with the same number of edges on the boundary.

Or

(ஆ) n–ஒற்றைப்படை எண் மற்றும் $n \neq 1$ என்று இருக்கும் போது $\chi'(K_n) = n$ என்றும், n–இரட்டைப் படை எண்ணாக இருக்கும்போது $\chi'(K_n) = n - 1$ என்றும் நிரூபி.

Prove that, $\chi'(K_n) = n$ if n is odd, $n \neq 1$ and $\chi'(K_n) = n - 1$ if n is even.

20. (அ) G ஆனது $n \geq 2$ புள்ளிகளைக் கொண்ட மரம் எனில் $f(G, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$ என நிறுவுக.

If G is a tree with n points, $n \geq 2$, prove that $f(G, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$.

Or

(ஆ) நிறுவுக : ஒரு வலுவற்ற திசை வரைவு D ஆயிலீரியன் வரைவு $\Leftrightarrow$ D–யின் ஒவ்வொரு புள்ளியும் சமமான உள்படி வெளிபடி கொண்டிருக்கும்.

If a weak digraph D is Eulerian $\Leftrightarrow$ every point of D has equal indegree and outdegree.

———————

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam