(ஆ) திட்ட உட்பெருக்கத்துடன் கூடிய $V_3(R)$ என்ற வெளியில் $\{(1,0,1),(1,3,1),(3,2,1)\}$ என்ற அடுக்களத்திற்கு ஒரு இயல்பான அடுக்களத்தை கிராம்-ஸமித் முறை மூலம் காண்க.

Apply Gram – Schmidt process to find an orthonormal basis for $V_3(R)$ with the standard inner product for the basis $\{(1,0,1),(1,3,1),(3,2,1)\}$.

Reg. No. : ....

Code No. : 20826 **Sub. Code : GMMA 51/ GMMC 51**

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2015.

Fifth Semester

Mathematics — Main

LINEAR ALGEBRA

(For those who joined in July 2012 and afterwards)

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer :

1. $\alpha = a + ib \in C$ மற்றும் $u \in \mathbf{R}$ என்க. $\mathbf{R}$ ஒரு திசையன் வெளி அல்ல, ஏனெனில்

(அ) $\alpha u \in \mathbf{R}$ (ஆ) $0 \in \mathbf{R}$

(இ) $1 \in \mathbf{R}$ (ஈ) $\alpha u \notin \mathbf{R}$

Let $\alpha = a + ib \in C$ and $u \in \mathbf{R}$. $\mathbf{R}$ is not a vector space, since

(a) $\alpha u \in \mathbf{R}$ (b) $0 \in \mathbf{R}$

(c) $1 \in \mathbf{R}$ (d) $\alpha u \notin \mathbf{R}$

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

2. v என்பது F என்ற களத்தின் மேல் ஒரு திசையன் வெளி எனில் $\alpha v = 0 \Rightarrow$

(அ) $\alpha = 0$ அல்லது $v = 0$

(ஆ) $\alpha = 0$ மற்றும் $v = 0$

(இ) $\alpha = 0$

(ஈ) $v = 0$

If v is a vector space over a field F, then $\alpha v = 0 \Rightarrow$

(a) $\alpha = 0$ or $v = 0$ (b) $\alpha = 0$ and $v = 0$

(c) $\alpha = 0$ (d) $v = 0$

3. $M_2(\mathbf{R})$ என்ற திசையன் வெளியின் பரிமாணம்

(அ) 2 (ஆ) 4

(இ) 6 (ஈ) 8

The dimension of the vector space $M_2(\mathbf{R})$ is

(a) 2 (b) 4

(c) 6 (d) 8

4. $L(\{1, i\}) =$

(அ) R (ஆ) Q

(இ) Z (ஈ) C

$L(\{1, i\}) =$

(a) R (b) Q

(c) Z (d) C

5. Ker T என்பதன் மறுபெயர்

(அ) ϕ (ஆ) வெற்று வெளி

(இ) T இன் தரம் (ஈ) பயனற்ற தன்மை

Ker T is also called

(a) ϕ (b) null space

(c) rank of T (d) nullity

6. $T : V_2(\mathbf{R}) \to V_2(\mathbf{R})$ என்பது $T(a, b) = (a, a + b)$ என வரையறுக்கப்பட்டால் T ஐ குறிக்கும் அணி

(அ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ஆ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(இ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ஈ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

If $T : V_2(\mathbf{R}) \to V_2(\mathbf{R})$ is defined by $T(a, b) = (a, a + b)$, then the matrix representing T is

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

7. $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் ஐகன் மதிப்புகள்

(அ) 0, 1 (ஆ) 1, 2

(இ) 2, 3 (ஈ) 1, –1

The eigen values of the matrix $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ are

(a) 0, 1 (b) 1, 2

(c) 2, 3 (d) 1, –1

8. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் ஐகன் மதிப்புகளின் பெருக்கற்பலன்

(அ) 14 (ஆ) 16

(இ) –16 (ஈ) –14

The product of the eigen values of the matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ is

(a) 14 (b) 16

(c) –16 (d) –14

9. $\sqrt{<x, x>}$ என்பதன் மதிப்பு

(அ) 0 (ஆ) 1

(இ) $\|y\|$ (ஈ) $\|x\|$

The value of $\sqrt{<x, x>}$ is

(a) 0 (b) 1

(c) $\|y\|$ (d) $\|x\|$

10. V என்பது ஒரு உட்பெருக்க வெளி எனில் $V^{\perp}$ என்பதன் மதிப்பு

(அ) 0 (ஆ) $\{0\}$

(இ) V (ஈ) ϕ

If V is an inner product space, then the value of $V^{\perp}$ is

(a) 0 (b) $\{0\}$

(c) V (d) ϕ

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

7. $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் ஐகன் மதிப்புகள்

(அ) 0, 1 (ஆ) 1, 2

(இ) 2, 3 (ஈ) 1, –1

The eigen values of the matrix $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ are

(a) 0, 1 (b) 1, 2

(c) 2, 3 (d) 1, –1

8. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் ஐகன் மதிப்புகளின் பெருக்கற்பலன்

(அ) 14 (ஆ) 16

(இ) –16 (ஈ) –14

The product of the eigen values of the matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ is

(a) 14 (b) 16

(c) –16 (d) –14

9. $\sqrt{< x, x >}$ என்பதன் மதிப்பு

(அ) 0 (ஆ) 1

(இ) $\|y\|$ (ஈ) $\|x\|$

The value of $\sqrt{< x, x >}$ is

(a) 0 (b) 1

(c) $\|y\|$ (d) $\|x\|$

10. V என்பது ஒரு உட்பெருக்க வெளி எனில் $V^{\perp}$ என்பதன் மதிப்பு

(அ) 0 (ஆ) $\{0\}$

(இ) V (ஈ) ϕ

If V is an inner product space, then the value of $V^{\perp}$ is

(a) 0 (b) $\{0\}$

(c) V (d) ϕ

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) ஒரு திசையன் வெளியின் உட்கணம் உள்வெளியாக இருக்கத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனையைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove a necessary and sufficient condition for a subset of a vector space to be a subspace.

Or

(ஆ) ஒரு திசையன் வெளியின் இரண்டு உள்வெளிகளின் வெட்டு ஒரு திசையன் உள்வெளி என நிறுவுக.

Prove that the intersection of two subspaces of a vector space is a subspace.

12. (அ) $V_3(\mathbf{R})$ என்ற திசையன் வெளியில் $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 0)$ மற்றும் $(1, -1, 2)$ என்ற திசையன்கள் நேரியல் சார்பில்லாதவை என நிறுவுக.

Prove that the vectors $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 0)$ and $(1, -1, 2)$ are linearly independent in the vector space $V_3(\mathbf{R})$.

Or

(ஆ) ஒரு நேரியல் சார்பிலா கணத்தின் எந்தவொரு உட்கணமும் நேரியல் சார்பில்லாதது எனக்காட்டுக.

Show that any subset of a linearly independent set is linearly independent.

13. (அ) $T : V \to W$ என்பது ஒரு நேரியல் உருமாற்றம் எனில் T என்பதன் தரம் மற்றும் வெறுமைத் தன்மை ஆகியவற்றை வரையறு. மேலும் $\dim V = \text{rank } T + \text{nullity } T$ என நிறுவுக.

If $T : V \to W$ is a linear transformation, then define rank and nullity of T. Also prove that $\dim V = \text{rank } T + \text{nullity } T$.

Or

(ஆ) $\{e_1, e_2, e_3\}$ என்ற திட்ட அடுக்களத்தைப் பொறுத்து $T : V_3(\mathbf{R}) \to V_3(\mathbf{R})$ $T(a, b, c) = (3a, a-b, 2a+b+c)$ என்ற நேரியல் உருமாற்றத்தைக் குறிக்கும் அணியைக் காண்க.

Find the matrix representing the linear transformation $T : V_3(\mathbf{R}) \to V_3(\mathbf{R})$, $T(a, b, c) = (3a, a-b, 2a+b+c)$ with respect to the standard basis $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

14. (அ) கேய்லி - கேமில்டன் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாறு காண்க.

Find the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ using Cayley – Hamilton theorem.

Or

(ஆ) ஒரு ஹெர்மீசியன் அணியின் பண்பியல் மூலங்கள் அனைத்தும் மெய்யெண்கள் என நிறுவுக.

Prove that the characteristic roots of a Hermitian matrix are all real numbers.

15. (அ) திட்ட உட்பெருக்கத்தின் கீழ் $V_3(R)$ என்ற வெளிக்கு $(1, 3, 4)$ என்ற வெக்டரை உள்ளடக்கிடய ஒரு செங்குத்து அடுக்களத்தைக் காண்க.

Find an orthogonal basis containing the vector $(1, 3, 4)$ for $V_3(R)$ with the standard inner product.

Or

(ஆ) W_1 மற்றும் W_2 என்பன ஒரு முடிவுறு பரிமாண உட்பெருக்க வெளியின் உள்வெளிகள் எனில் $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$ எனக்காட்டுக.

Show that $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$ if W_1 and W_2 are subspaces of a finite dimensional inner product space.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) புனல் சார்பின் அடிப்படைத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove the fundamental theorem of homomorphism.

Or

(ஆ) வழக்கமான குறியீடுகளின் கீழ் $L(V, W)$ என்பது ஒரு திசையன் வெளி என நிறுவுக.

Prove that $L(V, W)$ is a vector space with usual notations.

17. (அ) F என்ற களத்தின் மேல் பரிமாணம் n உடைய எந்தவொரு திசையன் வெளியும் $V_n(F)$ உடன் வடிவொத்தது என நிறுவுக.

Prove that any vector space of dimension n over a field F is isomorphic to $V_n(F)$.

Or

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

(ஆ) A மற்றும் B என்பன ஒரு முடிவுறு பரிமாண திசையன் வெளியின் உள்வெளிகள் எனில் $\dim(A+B)=\dim A+\dim B-\dim(A\cap B)$ என நிறுவுக.

Prove that $\dim(A+B)=\dim A+\dim B-\dim(A\cap B)$ if A and B are subspaces of a finite dimensional vector space.

18. (அ) F என்ற களத்தின் மேல் V மற்றும் W என்பன இரு முடிவுறு பரிமாண திசையன் வெளிகள் என்க. $\dim V=m$ மற்றும் $\dim W=n$ எனில் F என்ற களத்தின் மேல் $L(V,W)$ என்பது ஒரு mn பரிமாண திசையன் வெளி என நிறுவுக.

Let V and W be two finite dimensional vector spaces over a field F. If $\dim V=m$ and $\dim W=n$, then prove that $L(V,W)$ is a vector space of dimension mn over F.

Or

(ஆ) $T_1:V\to V$ மற்றும் $T_2:V\to V$ என்பன நேரியல் உருமாற்றங்கள் எனில் கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக.

(i) rank $(T_2T_1)\le$ rank T_2

(ii) nullity $(T_2T_1)\ge$ nullity T_1.

If $T_1:V\to V$ and $T_2:V\to V$ are linear transformations then prove the following

(i) rank $(T_2T_1)\le$ rank T_2

(ii) nullity $(T_2T_1)\ge$ nullity T_1.

19. (அ) கேய்லி - கேமில்டன் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove Cayley – Hamilton theorem.

Or

(ஆ) $A=\begin{bmatrix}2&-2&2\\1&1&1\\1&3&-1\end{bmatrix}$ என்ற அணியின் பண்பியல் மூலங்கள் மற்றும் பண்பியல் திசையன்களைக் காண்க.

Find the characteristic roots and the characteristic vectors of the matrix $A=\begin{bmatrix}2&-2&2\\1&1&1\\1&3&-1\end{bmatrix}$.

20. (அ) எந்தவொரு முடிவுறு பரிமாண உட்பெருக்க வெளிக்கும் ஒரு இயல்பான அடுக்களம் உண்டு என நிறுவுக.

Prove that every finite dimensional inner product space has an orthonormal basis.

Or

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam