Reg. No. : ....

Code No. : 20826 **Sub. Code : GMMA 51/ GMMC 51**

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2017.

Fifth Semester

Mathematics — Main

LINEAR ALGEBRA

(For those who joined in July 2012-2015)

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer :

1. T என்பது ஒன்றுக்கு வேறானது எனில் அதன் உருமாற்றம் —————— என அழைக்கப்படுகிறது.

(அ) செயல்மாறா கோர்த்தல்

(ஆ) இயல்மாற்றா கோர்த்தல்

(இ) ஓர் அமைவியம்

(ஈ) வெளி அமைவியம்

20. (அ) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2$ என்று வரையறுக்கப்பட்டுள்ள உட்பெருக்கலின் படி ஒரு உட்பெருக்க வெளி எனக்காட்டு. இதில் $x = (x_1, x_2)$ மற்றும் $(y_1, y_2) = y$.

Show that $V_2(R)$ is an inner product space with inner product defined by $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2$ where $x = (x_1, x_2)$ and $(y_1, y_2) = y$.

Or

(ஆ) உட்பெருக்க வெளி V-ல் $\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2\left(\| x \|^2 + \| y \|^2\right)$ எனக்காட்டு.

Show that in any inner product space V $\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2\left(\| x \|^2 + \| y \|^2\right)$.

———————

If T is onto then the transformation T is called an ______.

(a) Homomorphism (b) Isomorphism

(c) Monomorphism (d) Epimorphism.

2. F-ன் ஒரு வெக்டர் வெளி V என்க மற்றும் V-ன் உள்வெளி W எனில் V/W ஒரு ______.

(அ) வெக்டர் வெளி

(ஆ) உள் வெளி

(இ) ஈவு வெளி

(ஈ) மேற்கூறிய ஏதும் இல்லை

Let V be a vector space over F and W be a subspace of V. Then V/W is a ______ of V by W.

(a) vector space (b) subspace

(c) quotient space (d) None of the above.

3. $R[x]$-ல், V என்பது பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் படி $\le n$ என்ற கணம் எனில் V-ன் அடிக்கணம்.

(அ) $\{0, x, x^2, \cdots, x^n\}$

(ஆ) $\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n\}$

(இ) $\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^{n+1}\}$

(ஈ) $\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^{n-1}\}$.

Let V be the set of all polynomials of degree $\le n$, in $R[x]$. A basis for V is

(a) $\{0, x, x^2, \cdots, x^n\}$

(b) $\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n\}$

(c) $\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^{n+1}\}$

(d) $\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^{n-1}\}$.

4. $M_2(R)$ -ல் பரிமாணம் ______

(அ) 1 (ஆ) 2

(இ) 3 (ஈ) 4.

$\dim M_2(R) =$

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4.

5. $T : V \to W$ என்பது ஒருபடி உருமாற்றம் எனில் $\ker T$-ன் பரிமாணம் என்பது ______.

(அ) வெற்று T

(ஆ) தரம் T

(இ) V-ன் பரிமாணம்

(ஈ) இவற்றில் ஏதும் இல்லை

Let $T : V \rightarrow W$ be a linear transformation. Then the dimension of ker T is called

(a) Nullity of T (b) Rank of T

(c) Dimension of V (d) None of the above.

6. $T : V \rightarrow V$ என்ற ஒருபடி உருமாற்றம் $T(f) = df/dx$ என வரையறுக்கப்படுமாயின், ker (T) என்பது ———— இதில் V என்பது $R[x]$-ல் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் $\leq n$ என்ற கணம்.

(அ) $\{f(x)/f(x)$ ஒரு மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவை$\}$

(ஆ) $\{f(x)/\deg f(x) = 1\}$

(இ) $\{f(x)/\deg f(x) = n\}$

(ஈ) $\{f(x)/\deg f(x) > n\}$.

In the linear transformation $T : V \rightarrow V$ defined by $T(f) = df/dx$, where V is the set of all polynomials of degree $\leq n$ in $R[x]$ ker (T) is given by

(a) $\{f(x)/f(x)$ is a constant polynomial$\}$

(b) $\{f(x)/\deg f(x) = 1\}$

(c) $\{f(x)/\deg f(x) = n\}$

(d) $\{f(x)/\deg f(x) > n\}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$-ன் ஐகன் மதிப்புகள் .

(அ) 1, 1, 2 (ஆ) 3, 5, 3

(இ) 3, 4, 1 (ஈ) 3, 0, 0.

The eigen values of $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ are

(a) 1, 1, 2 (b) 3, 5, 3

(c) 3, 4, 1 (d) 3, 0, 0.

8. A-ன் ஐகன் மதிப்புகள் $-1, 2, 5$ எனில் $(5A)^{-1}$ ஐகன் மதிப்பு ————.

(அ) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{25}$ (ஆ) $-4, 14, 50$

(இ) 1, 4, 25 (ஈ) $-\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{25}$.

If the eigen values of A are $-1, 2, 5$ then the eigen values of $(5A)^{-1}$ are

(a) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{25}$ (b) $-4, 14, 50$

(c) 1, 4, 25 (d) $-\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{25}$.

9. பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வெக்டர் வெளி V-ன் உட்பெருக்கல் $\langle f, g\rangle = \int_0^2 f(t)\, g(t)\, dt$ என்க. மேலும் $f(t) = t+1$ எனில் $\| f \|$-ன் மதிப்பு.

(அ) 9 (ஆ) 0

(இ) 26/3 (ஈ) $\sqrt{\frac{26}{3}}$.

Let V be a vector space of polynomials with inner product defined by $\langle f, g\rangle = \int_0^2 f(t)\, g(t)\, dt$. Then the norm of f defined by $\| f \|$ where $f(t) = t+1$ is given by

(a) 9 (b) 0

(c) 26/3 (d) $\sqrt{\frac{26}{3}}$.

10. பொதுவான உட்பெருக்கலைக் கொண்ட $V_3(R)$-ல் $(1, 2, 3)$ என்ற வெக்டாரின் மதிப்பானது ————.

(அ) 6 (ஆ) 14

(இ) $\sqrt{14}$ (ஈ) 1.

The norm of the vector $(1, 2, 3)$ in $V_3(R)$ with standard inner product is

(a) 6 (b) 14

(c) $\sqrt{14}$ (d) 1..

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

Each answer should not exceed 250 words.

11. (அ) $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ என்று வரையறுக்கப்பட்டுள்ள $T : V_3(R) \to R$ ஓர் ஒருபடி உருமாற்றம் இல்லை என நிறுவுக.

Prove that $T : V_3(R) \to R$ defined by $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ is not a linear transformation.

Or

(ஆ) $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ மற்றும் $e_3 = (0, 0, 1)$ எனில் $V_3(R)$-ன் படர்வு $\{e_1, e_2, e_3\}$ என நிறுவுக.

Let $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ and $e_3 = (0, 0, 1)$. Prove that $V_3(R)$ is spanned by $\{e_1, e_2, e_3\}$.

12. (அ) F-ன் முடிவுறு பரிமாணமுடைய வெக்டர் வெளி V எனில், V-ன் எந்தவொரு ஒருபடி சாரா வெக்டர் கணமும், அதன் அடிக்கணத்தின் ஒரு பகுதியாக இருக்கும் என நிரூபி.

Let V be a finite dimensional vector space over a field F. Any linearly independent set of vectors in V is part of a basis.

Or

(ஆ) $S = \{(1,0,0),(1,1,0)\}$ ஒரு ஒருபடி சாரா கணம் $V_3(R)$-ன் அடிக்கணம் இல்லை என காட்டு.

Show that $S = \{(1,0,0),(1,1,0)\}$ is a linearly independent but not a basis of $V_3(R)$.

13. (அ) $T: V_3(R) \to V_3(R)$-ன் அணி $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ அதன் நிலையான அடிக்கணம் $\{e_1, e_2, e_3\}$-ஐ பொறுத்து அமையுமானால் அதன் ஒருபடி உருமாற்றத்தைக் கண்டுபிடி.

Find the linear transformation $T: V_3(R) \to V_3(R)$ determined by the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ with respect to the standard basis $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Or

(ஆ) $T: V_3(R) \to V_3(R)$-ன் அணியானது $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$ அதன் நிலையான அடிக்கணத்தைப் பொறுத்து அமையுமாயின் அதன் ஒருபடி உருமாற்றத்தை தருவி.

Obtain the linear transformation determined by the matrix $T: V_3(R) \to V_3(R)$ given by $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$ with respect to the standard basis.

14. (அ) ஹெய்லி - ஹேமில்டன் தேற்றத்தை, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ என்ற அணிக்கு சோதித்து பார்.

Verify Cayley Hamiltons theorem for the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Or

(ஆ) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ என்ற அணி $A(A-I)(A+2I)=0$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் எனக் காட்டுக.

Show that the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ satisfies the equation $A(A-I)(A+2I)=0$.

15. (அ) ஒரு முடிவுறு பரிமாணங்கள் கொண்ட உட்பெருக்க வெளியின் உள்வெளிகள் W_1 மற்றும் W_2 எனில்

(i) $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.

(ii) $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$ என நிறுவுக.

Let W_1 and W_2 be subspaces of a finite dimensional inner product space. Then prove that

(i) $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.

(ii) $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$

Or

(ஆ) V என்பது முடிவுறு பரிமாணம் கொண்ட உட்பெருக்க வெளி என்க. மேலும் V -ன் உள்வெளி W எனில் $V = W \oplus W^{\perp}$ என நிறுவுக.

Let V be a finite dimensional inner product space. Let W be a subspace of V, then prove that $V = W \oplus W^{\perp}$.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

Each answer should not exceed 600 words.

16. (அ) செயல்மாறாக் கோர்த்தலின் அடிப்படை தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove fundamental theorem of homomorphism.

Or

(ஆ) F-ன் ஓர் வெக்டர் வெளி V -ல் S என்பது ஒரு வெற்றிலா உட்கணம் எனில்.

(i) V -ன் உள்வெளி $L(S)$.

(ii) $S \subseteq L(S)$.

(iii) V-ன் ஓர் உள்வெளி W அதைபோன்று $S \subseteq W$ எனில் $L(S) \subseteq W$.

Let V be a vector space over F a field F and S be a non empty subset of V. Then show that,

(i) $L(S)$ is a subspace of V.

(ii) $S \subseteq L(S)$.

(iii) If W is any subspace of V such that $S \subseteq W$ then $L(S) \subseteq W$.

17. (அ) F-ன் n பரிமாணம் கொண்ட எந்த ஒரு வெக்டர் வெளியும், $V_n(F)$-ற்க்கு இயல்மாறாக் கோர்த்தலாக இருக்கும் என நிரூபி.

Prove that any vector space of dimension n over a field F is isomorphic to $V_n(F)$.

Or

(ஆ) F-ன் முடிவுறு பரிமாணங்கள் கொண்ட வெக்டர் வெளி V என்க. V-ன் உள்வெளி W எனில்

(i) $\dim W \le \dim V$.

(ii) $\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$.

Let V be a finite dimensional, vector space over a field F. Let W be a subspace of V. Then show that

(i) $\dim W \le \dim V$.

(ii) $\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$.

18. (அ) $T_1 : V \to V$ மற்றும் $T_2 : V \to V$ ஆகியவை ஒருபடி உருமாற்றங்கள் எனில் கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபி.

(i) தரம் $(T_2T_1) \le$ தரம் (T_2)

(ii) வெற்று $(T_2T_1) \ge$ வெற்று T_1

(iii) தரம் (T_2T_1) = தரம் T_2 போதுமான மற்றும் தேவையான நிபந்தனை T_1 ஒரு ஒருமையற்றது.

Let $T_1 : V \to V$, $T_2 : V \to V$ be linear transformation then prove that,

(i) $rank\ (T_2T_1) \le rank\ (T_2)$.

(ii) $nullity\ (T_2T_1) \ge nullity\ T_1$.

(iii) $rank\ (T_2T_1) = rank\ T_2$ iff T is non-singular.

Or

(ஆ) F-ன் இரு முடிவுறு பரிமாணம் உடைய வெக்டர் வெளிகள் V மற்றும் W என்க. $\dim V = m$ மற்றும் $\dim W = n$ எனில் $L(V, W)$ mn பரிமாணம் கொண்ட F-ன் ஒரு வெக்டர் வெளி என நிறுவுக.

Let V and W be two finite dimensional vector spaces over a field F. Let $\dim V = m$ and $\dim W = n$. Then prove that $L(V, W)$ is a vector space of dimension mn over F.

19. (அ) ஹெய்லி- ஹேமில்டன் தேற்றத்தைக் கூறி நிரூபி.

State and prove Cayley Hamilton theorem.

Or

(ஆ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ எனில்

$A^3 - 2A^2 - 5A + 6I = 0$ என நிரூபி.

If $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ then prove that $A^3 - 2A^2 - 5A + 6I = 0$.