20. (அ) $x^2+y^2=a^2$; $z=0$ மற்றும் $z=4$-ஆல் உருவான உருளைப்பகுதி S, $f=yi+xj+z^2k$ எனில் காஸின் விரிவு தேற்றத்தைச் சரிபார்.

Verify Gauss divergence theorem for $f=yi+xj+z^2k$ for the cylindrical region S given by $x^2+y^2=a^2$; $z=0$ and $z=4$.

Or

(ஆ) $x^2+y^2+z^2=1$ என்ற கோளத்தின் மேல் அரை தளம் S, அதன் எல்லை C மற்றும் $f=(2x-y)i-yz^2j-y^2zk$ எனில் ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்தைச் சரிபார்.

Verify Stokes theorem for $f=(2x-y)i-yz^2j-y^2zk$ where S is the upper half surface of the sphere $x^2+y^2+z^2=1$ and C is its boundary.

———————

Reg. No. : ....

Code No. : 30153 **Sub. Code : GAMA 21**

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2014.

Second Semester

Mathematics — Allied

VECTOR CALCULUS

(For those who joined in July 2012 onwards)

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL the questions.

Choose the correct answer.

1. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ என்பன மூன்று வெக்டார்கள் எனில், $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=$ ____________.

(அ) $[\bar{c}\ \bar{a}\ \bar{b}]$ (ஆ) $[\bar{b}\ \bar{a}\ \bar{c}]$

(இ) $[\bar{a}\ \bar{c}\ \bar{b}]$ (ஈ) $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

If $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ are three vectors, $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) =$ ______________.

(a) $[\bar{c}\ \bar{a}\ \bar{b}]$ (b) $[\bar{b}\ \bar{a}\ \bar{c}]$

(c) $[\bar{a}\ \bar{c}\ \bar{b}]$ (d) $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$

2. $\bar{f}$, $\bar{g}$ வெக்டார்கள் சுழற்சியற்றவை எனில் $\bar{f} \times \bar{g}$ ஓர் ______________.

(அ) சுழற்சியற்றது (ஆ) 0

(இ) பாய்வற்றது (ஈ) மாறிலி

If $\bar{f}$ and $\bar{g}$ are irrotational, $\bar{f} \times \bar{g}$ is ______________.

(a) irrotational (b) 0

(c) solenoidal (d) constant

3. $\int \frac{dx}{4+9x^2}$ -ன் மதிப்பு

(அ) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)$ (ஆ) $\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)$

(இ) $\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)$ (ஈ) $\tan^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)$

$\int \frac{dx}{4+9x^2} =$ ______________.

(a) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)$ (b) $\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)$

(c) $\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)$ (d) $\tan^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)$

4. $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$ -ன் மதிப்பு ______________.

(அ) 0 (ஆ) 1

(இ) –1 (ஈ) 2

$\int_0^{\pi} \sin x\, dx =$ ______________.

(a) 0 (b) 1

(c) –1 (d) 2

5. $\int_0^1 \int_0^2 xy^2\, dy\, dx$ -ன் மதிப்பு ______________.

(அ) 2 (ஆ) 4/3

(இ) 3/4 (ஈ) 0

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

$\int_0^1 \int_0^2 xy^2 \, dy \, dx =$ ______________.

(a) 2 (b) 4/3

(c) 3/4 (d) 0

6. $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$ மற்றும் $z=1$ இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கன அளவு ______________.

(அ) 1 (ஆ) 3

(இ) 0 (ஈ) ஏதுமில்லை

The volume bounded by $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$ and $z=1$ is

(a) 1 (b) 3

(c) 0 (d) none

7. $\bar{f} = xi + yj$ எனில் வளைவரை $y^2 = x$ -ன் வழியே $\int_{(1,1)}^{(2,4)} \bar{f} \cdot d\bar{r} =$ ______________.

(அ) 1 (ஆ) –1

(இ) 0 (ஈ) ஏதுமில்லை

If $\bar{f} = xi + yj$, along the curve $y^2 = x$, $\int_{(1,1)}^{(2,4)} \bar{f} \cdot d\bar{r} =$ ______________.

(a) 1 (b) –1

(c) 0 (d) None

8. தளம் S-ன் வீழல் yz-தளத்தில் R எனில் $\iint_S f \cdot n \, dS =$ ______________.

(அ) $\iint_R \frac{f \cdot n}{|n \cdot k|} dx \, dy$ (ஆ) $\iint_R \frac{f \cdot n}{|n \cdot i|} dy \, dz$

(இ) $\int_C f \cdot dr$ (ஈ) 0

If R is the projection of the surface S on yz-plane then $\iint_S f \cdot n \, dS =$ ______________.

(a) $\iint_R \frac{f \cdot n}{|n \cdot k|} dx \, dy$ (b) $\iint_R \frac{f \cdot n}{|n \cdot i|} dy \, dz$

(c) $\int_C f \cdot dr$ (d) 0

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

9. S என்ற மூடிய தளத்தின் கன அளவு V எனில், $\iint_S r\cdot n\, dS =$ ————.

(அ) $3V^2$ (ஆ) $3V$

(இ) $6V$ (ஈ) 0

If V is the volume enclosed by the closed surface S then $\iint_S r\cdot n\, dS$ is ————.

(a) $3V^2$ (b) $3V$

(c) $6V$ (d) 0

10. காஸ் விரிவு தேற்றம் ———— ஐ தொடர்புபடுத்துகின்றது.

(அ) கோட்டுத் தொகை மற்றும் இரட்டைத் தொகை

(ஆ) கோட்டுத் தொகை மற்றும் தள தொகை

(இ) இரட்டைத் தொகை மற்றும் தள தொகை

(ஈ) தள தொகை மற்றும் கன அளவு தொகை

Gauss divergence theorem connects

(a) line integral and double integral

(b) line integral and surface integral

(c) double integral and surface integral

(d) surface integral and volume integral

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL the questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) u, v என்பன இரு வெக்டார்கள் எனில் $\frac{d}{dt}(u\times v) = u\times\frac{dv}{dt} + \frac{du}{dt}\times v$ என நிறுவுக.

If u and v are two vectors, prove that $\frac{d}{dt}(u\times v) = u\times\frac{dv}{dt} + \frac{du}{dt}\times v$.

Or

(ஆ) $P(x, y, z)$ -ன் நிலை வெக்டார் $\bar{r}$ எனில் $grad\ r^n = nr^{n-2}\bar{r}$ என நிரூபி.

If $\bar{r}$ is the position vector of any point $P(x, y, z)$, prove that $grad\ r^n = nr^{n-2}\bar{r}$.

12. (அ) $\int \sin^4 x\, dx$ -ஐக் காண்க.

Evaluate $\int \sin^4 x\, dx$.

Or

(ஆ) $\int \frac{x^{24}}{x^{10}+1}\, dx$ -ஐக் காண்க.

Evaluate $\int \frac{x^{24}}{x^{10}+1}\, dx$.

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

13. (அ) $\int_0^2\int_1^3\int_1^2 xy^2z\,dz\,dy\,dx$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

Evaluate $\int_0^2\int_1^3\int_1^2 xy^2z\,dz\,dy\,dx$.

Or

(ஆ) $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{k} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

Evaluate $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{k} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$.

14. (அ) $\bar{f}=(x^2+y^2)i-2xyj$ மற்றும் C-என்பது $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ என்பனவற்றால் மூடிய பகுதி எனில், $\int_C \bar{f}\cdot d\bar{r}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

Evaluate $\int_C \bar{f}\cdot d\bar{r}$ where $\bar{f}=(x^2+y^2)i-2xyj$ and C is the rectangle bounded by $x=0$, $x=a$, $y=0$ and $y=b$.

Or

(ஆ) $\bar{f}=(2y+3)\hat{i}+xz\hat{j}+(yz-x)\hat{k}$ மற்றும் C என்பது $A(0,1,1)$, $B(2,1,1)$ சேரும் நேர்கோடு எனில் $\int_C \bar{f}\cdot d\bar{r}$ -ஐ கண்டுபிடி.

Evaluate $\int_C \bar{f}\cdot d\bar{r}$, where $\bar{f}=(2y+3)\hat{i}+xz\hat{j}+(yz-x)\hat{k}$ and C is the line joining the points $A(0,1,1)$ and $B(2,1,1)$.

15. (அ) $\bar{f}=(x^3-yz)\hat{i}-2x^2y\hat{j}+2\hat{k}$ மற்றும் S என்பது $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=a$, $y=a$, $z=a$ ஆகியவற்றால் சூழப்பட்ட கன சதுரம் எனில், காஸின் விரிவு தேற்றத்தை பயன்படுத்தி, $\iint_S \bar{f}\cdot\hat{n}\,dS$ -ஐ காண்க.

By using Gauss divergence theorem, find $\iint_S \bar{f}\cdot\hat{n}\,dS$, where $\bar{f}=(x^3-yz)\hat{i}-2x^2y\hat{j}+2\hat{k}$ and S is the cube bounded by $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=a$, $y=a$, $z=a$.

Or

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

(ஆ) $y = x$ மற்றும் $y = x^2$ என்பனவற்றால் சூழப்பட்ட மூடிய பகுதி C எனில் கிரீன் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $\int_C (xy + y^2)\, dx + x^2\, dy$ -ஐக் காண்க.

By using Green's theorem, evaluate $\int_C (xy + y^2)\, dx + x^2\, dy$ where C is the closed region bounded by $y = x$ and $y = x^2$.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL the questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) $\nabla\phi = 2xyz^3\,\hat{i} + x^2z^3\,\hat{j} + 3x^2yz^2\,\hat{k}$ மற்றும் $\phi(1, -2, 2) = 4$ எனில் $\phi(x, y, z)$ -ஐ கண்டுபிடி.

If $\nabla\phi = 2xyz^3\,\hat{i} + x^2z^3\,\hat{j} + 3x^2yz^2\,\hat{k}$ find $\phi(x, y, z)$ if $\phi(1, -2, 2) = 4$.

Or

(ஆ) f என்பது இசைச் சார்பு எனில் $\nabla \times (\nabla \times f) = \nabla(\nabla \cdot f)$ என நிரூபி.

If f is harmonic, prove that $\nabla \times (\nabla \times f) = \nabla(\nabla \cdot f)$.

17. (அ) $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx = \pi - 2$ என நிறுவுக.

Prove that $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx = \pi - 2$.

Or

(ஆ) (i) $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \cos x\, dx$ எனில்

$I_n + n(n-1)\, I_{n-2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n$ எனக் காட்டு.

(ii) மதிப்பு காண்க : $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^5 x\, dx$.

(i) If $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \cos x\, dx$, show that

$I_n + n(n-1)\, I_{n-2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n$.

(ii) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^5 x\, dx$.

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

18. (அ) $2x + y + 2z = 6$ என்ற தளத்தின் முதல் மிகைக் கால் பகுதி S எனில் $\iint_S \bar{f} \cdot \hat{n}\, dS$ -ஐ காண்க. இங்கு $\bar{f} = (x + y^2)\hat{i} - 2x\hat{j} + 2yz\hat{k}$.

Evaluate $\iint_S \bar{f} \cdot \hat{n}\, dS$, where

$\bar{f} = (x + y^2)\hat{i} - 2x\hat{j} + 2yz\hat{k}$

and S is the surface of the plane $2x + y + 2z = 6$ in the first octant.

Or

(ஆ) (i) $\int_0^1 \int_y^{2y} e^{x-y}\, dx\, dy$ மற்றும்

(ii) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^2\, dr\, d\theta$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

Evaluate :

(i) $\int_0^1 \int_y^{2y} e^{x-y}\, dx\, dy$ and

(ii) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^2\, dr\, d\theta$.

19. (அ) $\bar{f} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ மற்றும் C என்பது $A(0,1,0)$, $B(0,2,1)$ என்ற புள்ளிகளால் இணையும் கோடு எனில் $\int_C \bar{f} \cdot d\bar{r}$ -ஐ காண்க.

Evaluate $\int_C \bar{f} \cdot d\bar{r}$, where $\bar{f} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ and C is the line joining the points $A(0,1,0)$ and $B(0,2,1)$.

Or

(ஆ) $\bar{f} = 4xzi - y^2j + yzk$; $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ மற்றும் $z = 1$ என்பனவற்றால் சூழப்பட்ட கன சதுரம் S எனில் $\iint_S f \cdot n\, dS$ -ஐக் காண்க.

Evaluate $\iint_S f \cdot n\, dS$ where

$\bar{f} = 4xzi - y^2j + yzk$

and S is the cube bounded by $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ and $z = 1$.

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam