

20. (அ) R என்பது சமனி உடைய பரிமாற்று வளையம் என்க. R ன் உள்வளையம் அதிகபட்சமாக இருந்தால் மட்டுமே R/M என்பது ஒரு களம் என நிறுவுக.

Let R be a commutative ring with identity. Prove that ideal M of R is maximal iff R/M is a field.

Or

- (ஆ) S ல் $\sim$ என்பது சமான உறவு என நிரூபி.

Prove that $\sim$ is an equivalence relation in S .

Reg. No. :

Code No. : 30151

Sub. Code : GMMA 41/
GMMC 41

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2014.

Fourth Semester

Mathematics — Main

Paper VI – ABSTRACT ALGEBRA

(For those who joined in July 2012 onwards)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer :

1. $f : R \rightarrow R$ என்ற சார்பு $f(x) = x + 3$ என வரையறுக்கப்பட்டபின் $f^{-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(அ) x

(ஆ) $x + 3$

(இ) $x - 3$

(ஈ) 0



If $f: R \rightarrow R$ is defined as $f(x) = x + 3$, then $f^{-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (a) x (b) $x + 3$
(c) $x - 3$ (d) 0

2. $A \rightarrow B$ மற்றும் $g: B \rightarrow C$ என்பன இரு புறப்பாக்கள் எனில் $(g \circ f)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (அ) $g^{-1} \circ f^{-1}$ (ஆ) $f^1 \circ g^{-1}$
(இ) $(f \circ g)^{-1}$ (ஈ) $f^1 + g^{-1}$

If $A \rightarrow B$ and $g: B \rightarrow C$ are bijections then $(g \circ f)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (a) $g^{-1} \circ f^{-1}$ (b) $f^1 \circ g^{-1}$
(c) $(f \circ g)^{-1}$ (d) $f^1 + g^{-1}$

3. $(\mathbb{Z}, +)$ யில் பூச்சியம் அல்லாத உறுப்பின் வரிசை

- (அ) ∞ (ஆ) 0
(இ) 1 (ஈ) 2

Order of a non-zero element in $(\mathbb{Z}, +)$ is

- (a) ∞ (b) 0
(c) 1 (d) 2

4. பின்வருவனற்றுள் எது $(C^*, \cdot)$ யின் உட்குலம் இல்லை?

- (அ) $\{1, i, -1, i\}$ (ஆ) $\{1, -1\}$
(இ) $\{1\}$ (ஈ) $\{i, -i\}$

Which of the following are not subgroups of $(C^*, \cdot)$?

- (a) $\{1, i, -1, i\}$ (b) $\{1, -1\}$
(c) $\{1\}$ (d) $\{i, -i\}$

5. G என்பது ஒரு முடிவுள்ள குலம். H என்பது G யின் உட்குலம் $[G : H] = |G|$ எனில் $H =$

- (அ) $\{e\}$ (ஆ) G
(இ) e (ஈ) $\{1\}$

Let G be a finite group and H a subgroup of G if $[G : H] = |G|$, then H is

- (a) $\{e\}$ (b) G
(c) e (d) $\{1\}$

6. $\frac{\mathbb{Z}_6}{\langle 3 \rangle}$ என்ற ஈவு குலத்தின் வரிசை

- (அ) 2 (ஆ) 3
(இ) 6 (ஈ) 1



Order of the quotient group $\frac{Z_6}{\langle 3 \rangle}$

- (a) 2 (b) 3
(c) 6 (d) 1

7. ஒரு வளையம் பூலியன் வளையம் எனில் _____.

- (அ) $a^2 = e$ அனைத்து $a \in R$ என்பது பெருக்கல் சமனி
(ஆ) $a^2 = a$ அனைத்தும் $a \in R$
(இ) $a^2 = 0$ அனைத்தும் $a \in R$
(ஈ) $a^n = 0$ ஏதேனும் $n \in R$

A ring is called a Boolean ring if _____.

- (a) $a^2 = e$ for all $a \in R$ where e is the multiplicative identity
(b) $a^2 = a$ for all $a \in R$
(c) $a^2 = 0$ for all $a \in R$
(d) $a^n = 0$ for some $n \in R$

8. சமனி அல்லாத முடிவுறா, பரிமாற்று வளையத்திற்கான உதாரணம் _____.

- (அ) $(Z, +, \cdot)$ (ஆ) $(Z_n, \oplus, \otimes)$
(இ) $(2Z, +, \cdot)$ (ஈ) $M_2(R)$

An example of an infinite commutative ring without identity is _____.

- (a) $(Z, +, \cdot)$ (b) $(Z_n, \oplus, \otimes)$
(c) $(2Z, +, \cdot)$ (d) $M_2(R)$

9. $Z(x)$ ல் primitive அல்லாத பல்லுறுப்பு கோவை _____.

- (அ) $4x^2 + 9x + 2$
(ஆ) $3x^3 - x^2 + 2x - 5$
(இ) $2x^2 + 6x - 8$
(ஈ) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 7x + 15$

Choose the polynomial in $Z(x)$ which is not primitive _____.

- (a) $4x^2 + 9x + 2$
(b) $3x^3 - x^2 + 2x - 5$
(c) $2x^2 + 6x - 8$
(d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 7x + 15$



10. $f : Z \rightarrow Z$ என்ற சார்பு $f(x) = x^2 + 3$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில் f என்பது _____.

- (அ) செயல்மாறா கோர்த்தல் வளையம்
- (ஆ) செயல்மாறா கோர்த்தல் வளையம் அல்ல
- (இ) இயல்மாறா கோர்த்தல் வளையம்
- (ஈ) முழு ஒப்புமை வளையம்

The map $f : Z \rightarrow Z$ defined by $f(x) = x^2 + 3$ is _____.

- (a) a ring homomorphism
- (b) not a ring homomorphism
- (c) a ring isomorphism
- (d) a ring epimorphism

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions choosing either (a) or (b),
Answer should not exceed 250 words.

11. (அ) சமமான உறவை வரையறு. ρ என்பது ஒரு சமமான உறவு கணம் S எனில் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.
- (i) $a\rho b \Leftrightarrow [a] = [b]$
 - (ii) ஏதேனும் இரு வெவ்வேறு சமமான வகுப்புகளுக்குப் பொது உறுப்புகள் கிடையாது.

Define an equivalence relation. If ρ is an equivalence relation defined on a set S . prove the following :

- (i) $a\rho b \Leftrightarrow [a] = [b]$
- (ii) any two distinct equivalence classes are disjoint.

Or

- (ஆ) $M_2(R)$ யில் அணி பெருக்கல் சேர்ப்பு விதியை நிறைவு செய்யும் எனவும் பரிமாற்று விதியை நிறைவு செய்யாது எனவும் நிறுவுக.

Prove that in $M_2(R)$, matrix multiplication is associative but not commutative.

12. (அ) ஆய்வரின் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.
State and Prove Euler's theorem.

Or

- (ஆ) H என்பது G யின் உட்குலம் எனில், H யின் வல இணை கணங்களின் எண்ணிக்கை இட இணைகணங்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமம் என நிறுவுக.

Let H be a subgroup of G . Prove that the number of left cosets of H is the same as the number of right cosets of H .



13. (அ) குலங்களுக்கிடையேயான ஒரு ஒப்புமை ஒரு சமான உறவு என நிறுவுக.

Prove that isomorphism is an equivalence relation among groups.

Or

- (ஆ) எந்தவொரு முடிவிலா வட்ட குலமும் முழு எண் குலத்துடன் சம ஒப்புமை உடையது என நிறுவுக.

Prove that any infinite cyclic group is isomorphic to the group of integers.

14. (அ) $a, b \in \mathbb{Q}$ எனில் $a + b\sqrt{3}$ என்ற வடிவில் உள்ள அனைத்து மெய்யெண்களின் கணம் வழக்கமான கூட்டல் மற்றும் பெருக்கலின் கீழ் ஒரு வளையமாகும் என நிறுவுக.

Prove that the set of all real numbers of the form $a + b\sqrt{3}$ where $a, b \in \mathbb{Q}$ under usual addition and multiplication is a ring.

Or

- (ஆ) பூச்சிய வகுப்பான்கள் இல்லாத ஒரு முடிவுறு பரிமாற்று வளையம் R ஆனது ஒரு புலம் ஆகும் என நிறுவுக.

Prove that a finite commutative ring R without zero-divisors is a field.

15. (அ) ஒரு களத்திற்கு சீரான உள்வளையம் இல்லை என நிறுவுக.

Prove that a field has no proper ideals.

Or

- (ஆ) a என்பது யூக்ளிடியன் அரங்கு R ன் யூக்ளிடியமல்லாத உறுப்பு என்க. a என்பது R ன் அலகாக இருக்க தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $d(a) = d(1)$ எனக் காட்டுக.

Let a be a non-zero element of an Euclidean domain R . Prove that a is a unit in R iff $d(a) = d(1)$.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions choosing either (a) or (b), answer should not exceed 600 words.

16. (அ) $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ என்பன இரு சார்புகள் எனில் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

- (i) $g \circ f$ என்பது ஒன்றுக் கொன்றான சார்பு $\Rightarrow f$ என்பதும் ஒன்றுக் கொன்றான சார்பு
(ii) $g \circ f$ மேல் சார்பு $\Rightarrow g$ யும் மேல் சார்பு.

Let $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ be two function. Then prove the following

- (i) $g \circ f$ is 1-1 $\Rightarrow f$ is 1-1
(ii) $g \circ f$ is onto $\Rightarrow g$ is onto.

Or



(ஆ) R லிருந்து $(0,1)$ க்கு $f(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{x}{1+|x|} \right]$ என

வரையறுக்கப்பட்ட f என்ற சார்பு ஒரு இருபுறப்பான் எனக்காட்டுக.

Show that $f : g \rightarrow (0,1)$ defined by $f(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{x}{1+|x|} \right]$ is a bijection. Find its inverse also.

17. (அ) வட்ட குலத்தை வரையறு. ஒரு வட்டக்குலத்தின் உட்குலமும் வட்டக்குலம் என நிறுவுக.

Define a cyclic group. Prove that a subgroup of a cyclic group is cyclic.

Or

(ஆ) H, K என்பன G என்ற குலத்தின் முடிவுறு உட்குலங்கள் எனில் $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$ என நிறுவுக.

Let H and K be two finite subgroups of a group of G . The prove that $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$.

18. (அ) கேய்லீயின் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and Prove Cayley's theorem.

Or

(ஆ) வளையத்தில் செயலொப்புமைக்கான அடிப்படை தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and Prove Fundamental theorem of Homomorphism in rings.

19. (அ) ஒரு புலத்தின் சிற்பு எண் பூஜ்ஜியமாகவோ அல்லது ஒரு பகா எண்ணாகவோ இருக்கும் என நிறுவுக.

Prove the characteristic of any field is either 0 or a prime number.

Or

(ஆ) எந்தவொரு எண் அரங்கையும் ஒரு புலத்தில் பதிக்க முடியும் என நிறுவுக.

Prove that every integral domain can be embedded in a field.

