Verify Green's theorem in plane for the integral $\int_C x^2 \, y \, dx + y \, dy$, where C is the curve enclosing the region bounded by the line $y = x$ and the parabola $y^2 = x$.

Or

(ஆ) $A = xyi + yzj + zxk$ என்ற வெக்டர், $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ என்ற தளங்களை எல்லைகளாகக் கொண்டுள்ள $x + y + z = 1$ என்ற மேற்பரப்பினுடைய வரம்பின் மீது ஸ்டோக் தேற்றத்தை நிவர்த்தி செய்யும் என்பதை சரிபார்க்கவும்.

Verify Stoke's theorem for $A = xyi + yzj + zxk$ taken over the surface in the plane $x + y + z = 1$ bounded by the planes $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ over its boundary.

Reg. No. : ....

Code No. : 30148 **Sub. Code : GMMA 21/ GMMC 21**

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2014.

Second Semester

Mathematics – Main

VECTOR CALCULUS

(Also Common to Maths with Computer Application)

(For those who joined in July 2012 onwards)

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL the questions.

Choose the correct answer :

1. $\overline{A} = u^2 \hat{i} + u\hat{j} + 2\,u\hat{k}$, $\overline{B} = \hat{j} - u\hat{k}$ என்றால் $\dfrac{d}{du}\left(\overline{A}\,.\,\overline{B}\right)$–ன் மதிப்பு

   (அ) $2u - 1$ (ஆ) $2u + 1$

   (இ) $1 - 4u$ (ஈ) $1 + 4u$

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

If $\overline{A} = u^2 \hat{i} + u\hat{j} + 2\,u\hat{k}$ and $\overline{B} = \hat{j} - u\hat{k}$ then $\frac{d}{du}(\overline{A}.\overline{B})$ is

(a) $2u - 1$ (b) $2u + 1$

(c) $1 - 4u$ (d) $1 + 4u$

2. $\phi = x + xy^2 + yz^3$ எனில், $\nabla\phi$ இன்மதிப்பு

(அ) $(x + y^2)i + (2xy + z^3)j + 3yzk$

(ஆ) $(1 + y^2)i + (2xy + z^3)j + 3yz^2k$

(இ) $(1 + z^2)i + 2xyj + 3yz^2k$

(ஈ) $z^2i + 2xyj + 3yk$

If $\phi = x + xy^2 + yz^3$, then $\nabla\phi$ is

(a) $(x + y^2)i + (2xy + z^3)j + 3yzk$

(b) $(1 + y^2)i + (2xy + z^3)j + 3yz^2k$

(c) $(1 + z^2)i + 2xyj + 3yz^2k$

(d) $z^2i + 2xyj + 3yk$

3. $\overline{r} = xi + yj + zk$ எனில் $\nabla.\,\overline{r}$ இன் மதிப்பு

(அ) 0 (ஆ) 1

(இ) 2 (ஈ) 3

If $\overline{r} = xi + yj + zk$, then $\nabla.\,\overline{r}$ is

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 3

4. வெக்டர் $3xi + (x + y)j - azk$ சொலி நாய்டல் ஆக இருப்பின் a இன் மதிப்பு

(அ) 3 (ஆ) 4

(இ) 5 (ஈ) 6

If the vector $3xi + (x + y)j - azk$ is solenoidal then the value of a is

(a) 3 (b) 4

(c) 5 (d) 6

5. R என்பது S என்ற மேற்பரப்பின் yz – தளத்தின் மீதுள்ள பிறதளனறிவுரு எனில்

(அ) $\iint_S \phi\, dS = \iint_R \phi \frac{dx\,dy}{|n.k|}$

(ஆ) $\iint_S \phi\, dS = \iint_R \phi \frac{dy\,dz}{|n.i|}$

(இ) $\iint_S \phi dS = \iint_R \phi \frac{dz\,dx}{|n.j|}$

(ஈ) இவைகள் யாவும் இல்லை

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

If R is the projection of the surface S on the yz – plane, then

(a) $\iint_S \phi\, dS = \iint_R \phi \frac{dx\,dy}{|n.k|}$

(b) $\iint_S \phi\, dS = \iint_R \phi \frac{dy\,dz}{|n.i|}$

(c) $\iint_S \phi dS = \iint_R \phi \frac{dz\,dx}{|n.j|}$

(d) None of these

6. $2x + y + 2z = 6$ என்ற தளத்தின் மேற்பரப்பின் மீதுள்ள ஓர் அலகு செங்குத்து வெக்டர்

(அ) $\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j + \frac{2}{3}k$ (ஆ) $\frac{3}{7}i + \frac{2}{7}j + \frac{6}{7}k$

(இ) $2i + j + 2k$ (ஈ) $\frac{i}{3} + \frac{j}{6} + \frac{k}{3}$.

The unit vector normal to the surface of the plane $2x + y + .2z = 6$ is

(a) $\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j + \frac{2}{3}k$

(b) $\frac{3}{7}i + \frac{2}{7}j + \frac{6}{7}k$

(c) $2i + j + 2k$

(d) $\frac{i}{3} + \frac{j}{6} + \frac{k}{3}$

7. V என்பது S என்ற மேற்பரப்பால் உண்டாகும் கன அளவு எனில், $\iint_S \overline{r} \cdot ds =$ ____________

(அ) V (ஆ) $2V$

(இ) $3V$ (ஈ) $4V$

If V is the volume of the region enclosed by the surface S, then $\iint_S \overline{r} \cdot ds =$ ____________

(a) V (b) $2V$

(c) $3V$ (d) $4V$

8. S என்பது $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ என்ற கோளத்தின் மேற்பரப்பு எனில், $\iint_S \overline{r}.\overline{n}\, dS$ இன் மதிப்பு

(அ) $2\pi a^3$

(ஆ) $3\pi a^3$

(இ) $4\pi a^3$

(ஈ) இவைகள் யாவும் இல்லை

If S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, then the value of $\iint_S \overline{r}.\overline{n}\, dS$ is

(a) $2\pi a^3$ (b) $3\pi a^3$

(c) $4\pi a^3$ (d) None of these

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

9. C என்பது $x^2 + y^2 = 1$ எனும் வட்டம் எனில், $\int_C (x - 2y)\, dx + x\, dy$ இன் மதிப்பு

(அ) π (ஆ) 2π

(இ) 3π (ஈ) 4π.

If C is the circle $x^2 + y^2 = 1$, then $\int_C (x - 2y)\, dx + x\, dy$ is

(a) π (b) 2π

(c) 3π (d) 4π

10. $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ என்ற நீள்வட்டத்தின் பரப்பளவு

(அ) πa^2 (ஆ) πb^2

(இ) πab (ஈ) $\pi(a^2 + b^2)$

The area of the ellipse $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ is

(a) πa^2 (b) πb^2

(c) πab (d) $\pi(a^2 + b^2)$

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL the questions, choosing either (a) or (b).

Answer should not exceed 250 words.

11. (அ) $(1, 2, 3)$ என்ற புள்ளியில், $i - 2j + 2k$ என்ற திசையில் $\phi = 3xy^2 - x^2yz$ க்கான திசை வகைக்கெழுக் காண்க.

Find the directional derivative of $\phi = 3xy^2 - x^2yz$ at $(1, 2, 3)$ in the direction of $i - 2j + 2k$.

Or

(ஆ) $\nabla\phi = (6xy + z^3)i + (3x^2 - z)j + (3xz^2 - y)k$ எனில், ϕ இன் மதிப்பைக் காண்க.

Find ϕ if $\nabla\phi$ is $(6xy + z^3)i + (3x^2 - z)j + (3xz^2 - y)k$.

12. (அ) $\bar{r} = xi + yj + zk$ மற்றும் $r = |\bar{r}|$ எனில் $\nabla.(r^n\bar{r}) = (n+3)r^n$ என நிரூபிக்கவும்.

If $\bar{r} = xi + yj + zk$ and $r = |\bar{r}|$, show that $\nabla.(r^n\bar{r}) = (n+3)r^n$.

Or

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

(ஆ) $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla . A) - \nabla^2 A$ என நிருவுக.

Prove that $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla . A) - \nabla^2 A$.

13. (அ) $\overline{A} = (axy - z^2)\hat{i} + (x^2 + 2yz)\hat{j} + (y^2 - axz)\hat{k}$ இர்ரொட்டேசனலாக இருக்கும் போது a-ன் மதிப்பைக் காண்க.

Find the value of a if $\overline{A} = (axy - z^2)\hat{i} + (x^2 + 2yz)\hat{j} + (y^2 - axz)\hat{k}$ is irrotational.

Or

(ஆ) S என்பது, முதல் அரைக்கால் வளாகத்தில் உள்ள $2x + y + 2z = 6$ என்ற தளத்தின் மேற்பரப்பு மற்றும் $A = (x + y^2)i - 2xj + 2yzk$ எனில் $\iint \overline{A}.\overline{n}\, ds$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

Evaluate $\iint \overline{A}.\overline{n}\, ds$ if $A = (x + y^2)i - 2xj + 2yzk$ and S is the surface of the plane $2x + y + 2z = 6$ in the first octant.

14. (அ) $A = 2x^2yi - y^2j + 4xz^2k$ மற்றும் V என்பது, $y^2 + z^2 = 9$ என்ற உருளை மற்றும் $x = 2$ என்ற தளம் ஆகியவற்றால் அடைக்கப்பட்டுள்ள கன அளவு எனில், $\iiint_V \nabla . A dV$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

Evaluate $\iiint_V \nabla . A dV$ if $A = 2x^2yi - y^2j + 4xz^2k$ and V is the volume in the first octant bounded by the cylinder $y^2 + z^2 = 9$ and the plane $x = 2$.

Or

(ஆ) $F = x^3i + y^3j + z^3k$ மற்றும் $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ என்ற கோணத்தின் மேற்பரப்பு S எனில், $\iint_S F.ds = \frac{12}{5}\pi a^5$ என்று காண்பிக்கவும்.

If $F = x^3i + y^3j + z^3k$ and S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, Show that $\iint_S F.ds = \frac{12}{5}\pi a^5$.

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

15. (அ) C என்பது $r = a(1+\cos\theta)$ என்ற நெஞ்சுப்பை வடிவம் எனில், $\int_C xy^2 dy - x^2 y dx$, இன் மதிப்பைக் காண்க.

Evaluate $\int_C xy^2 dy - x^2 y dx$, where C is the cardioid $r = a(1+\cos\theta)$.

Or

(ஆ) C என்பது $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, என்ற கோடுகளைக் கொண்டுள்ள முக்கோணப் பரப்பின் வரம்பு எனில் $\int_C (3x^2 - 8y^2)\, dx + (4y - 6xy)\, dy$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

Evaluate $\int_C (3x^2 - 8y^2)\, dx + (4y - 6xy)\, dy$, where C is the boundary of the triangular area enclosed by the lines $x = 0$, $x + y = 1$, $y = 0$.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL the questions, choosing either (a) or (b).

Answer should not exceed 600 words.

16. (அ) (i) $\nabla\phi = (2x + 3y + 4xy^2)i + (3x + 3y^2 + 4x^2y + z + 1)j + (y + 2)k$ எனில் ϕ இன் மதிப்பைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

(ii) $\overline{r} = xi + yj + zk$ மற்றும் $r = |\overline{r}|$ எனில் $\nabla(\log r) = \frac{\overline{r}}{r^2}$ என நிரூபிக்கவும்.

(i) If $\nabla\phi = (2x + 3y + 4xy^2)i + (3x + 3y^2 + 4x^2y + z + 1)j + (y + 2)k$, find ϕ.

(ii) If $\overline{r} = xi + yj + zk$ and $|\overline{r}| = r$, prove that $\nabla(\log r) = \frac{\overline{r}}{r^2}$.

Or

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

(ஆ) (i) $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ எனில் $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\bar{r}}{r^3}$ என நிறுவுக.

(ii) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ என்ற மேற்பரப்பில், $(1,1,1)$ என்ற புள்ளியில் செங்குத்தாக உள்ள ஒரு அலகு வெக்டரைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

(i) Prove that $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\bar{r}}{r^3}$, where $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.

(ii) Find the unit vector normal to the surface $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ at $(1,1,1)$.

17. (அ) A மற்றும் B என்பன வெக்டர் புள்ளிச் சார்புகள் என்றால்.

$\nabla \times (A \times B) = \{(B.\nabla)A - (\nabla.A)B\}$

$-\{(A.\nabla)B - (\nabla.B)A\}$ என நிரூபிக்கவும்.

If A and B are vector point functions, then prove that

$\nabla \times (A \times B) = \{(B.\nabla)A - (\nabla.A)B\}$

$-\{(A.\nabla)B - (\nabla.B)A\}$.

Or

(ஆ) $\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$ எனக் காட்டுக. மேலும் $\nabla^2 f(r) = 0$ எனில் $f(r) = \frac{C}{r} + D$ எனக் காட்டுக. இங்கு C, D கட்டுப்பாடற்ற மாறிலிகள்.

Show that $\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$. Also show that if $\nabla^2 f(r) = 0$, then $f(r) = \frac{C}{r} + D$, where C and D are arbitrary constants.

18. (அ) $\bar{A} = yz\hat{i} + zx\hat{j} - xy\hat{k}$ மற்றும் C என்பது $O(0,0,0)$–யிலிருந்து $A(2,0,0)$ வரையிலும், A–யிலிருந்து $B(2,4,0)$ வரையிலும் மற்றும் B–யிலிருந்து $C(2,4,8)$ வரையிலும் உள்ள நேர் கோடுகளால் ஆன வளைவரை எனில் $\int_C \bar{A}.d\bar{r}$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

If $\bar{A} = yz\hat{i} + zx\hat{j} - xy\hat{k}$, evaluate $\int_C \bar{A}.d\bar{r}$, where C is the curve obtained by joining $O(0,0,0)$ to $A(2,0,0)$ then A to $B(2,4,0)$ and then B to $C(2,4,8)$ by straight lines.

Or

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

(ஆ) (i) வெக்டர் களம் பாதுகாப்பானதாக இருக்க, இன்றியமையாத மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு $\nabla \times f = 0$ என நிரூபிக்கவும்.

(ii) $\overline{F} = z(xi + yj + zk)$ எனில், $(0,0,0)$ இலிருந்து $(1,1,1)$ வரையுள்ள, $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ இன் மீது $\int_C F.d\overline{r}$ இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(i) Prove that the necessary and sufficient condition for a vector field f to be conservative if that $\nabla \times f = 0$.

(ii) If $\overline{F} = z(xi + yj + zk)$, evaluate $\int_C F.d\overline{r}$ along the curve $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ from $(0,0,0)$ to $(1,1,1)$.

19. (அ) $A = 4xi - 2y^2 j + z^2 k$ என்ற வெக்டர் $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 4$ மேற்பரப்புகளை எல்லைகளாகக் கொண்ட உருளை வடிவமான பரப்பிடத்தில் காஸ் டைவர்ஜண்ட் தேற்றத்தை நிவர்த்தி செய்யும் என்பதை சரிபார்க்கவும்.

Verify the Gauss divergence theorem for $A = 4xi - 2y^2 j + z^2 k$ taken over the cylindrical region bounded by the surfaces $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 4$.

Or

(ஆ) $A = a(x + y)i + a(y - x)j + z^2 k$ என்ற வெக்டர், மேல் அரைக்கோளம் $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ மற்றும் $z = 0$ என்ற தளத்தினை எல்லைகளாக கொண்டுள்ள V என்ற பரப்பிடத்தின் மீது டைவர்ஜண்ட் தேற்றத்தை நிவர்த்திச் செய்யும் என்பதை சரிபார்க்கவும்.

Verify the divergence theorem for $A = a(x + y)i + a(y - x)j + z^2 k$ taken over the region V bounded by the upper hemisphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ and the plane $z = 0$.

20. (அ) C என்பது $y = x$ என்ற கோட்டையும் மற்றும் $y^2 = x$ என்ற பரவளையத்தையும் எல்லையாகக் கொண்ட பரப்பிடத்தையும் உள்ளடக்கிய வளைவரை எனில் $\int_C x^2 \, y \, dx + y \, dy$ என்ற தொகையீடு தள கிரீண் தேற்றத்தை நிவர்த்திச் செய்யும் என்பதை சரிபார்க்கவும்.

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam