Reg. No. : ....

Code No. : 20828 **Sub. Code : GMMA 61/ GMMC 61**

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2015.

Sixth Semester

Mathematics — Main

Paper II — COMPLEX ANALYSIS

(For those who joined in July 2012 and afterwards)

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer.

1. z ஒரு சிக்கல் எண் எனில் மெய் z என்பது ————.

(அ) $\frac{z+\bar{z}}{2i}$ (ஆ) $\frac{z-\bar{z}}{2i}$

(இ) $\frac{z-\bar{z}}{2}$ (ஈ) $\frac{z+\bar{z}}{2}$

If z is a complex number, then $\text{Re}\, z$ is ________.

(a) $\frac{z+\bar{z}}{2i}$ (b) $\frac{z-\bar{z}}{2i}$

(c) $\frac{z-\bar{z}}{2}$ (d) $\frac{z+\bar{z}}{2}$

2. வீச்சு $z_1 = \frac{\pi}{3}$, வீச்சு $z_2 = \frac{\pi}{4}$ எனில் வீச்சு$\left(\frac{z_1}{z_2}\right) =$ ________.

(அ) $\frac{\pi}{12}$ (ஆ) $\frac{3\pi}{8}$

(இ) $\frac{2\pi}{7}$ (ஈ) $\frac{\pi}{2}$

If $\arg z_1 = \frac{\pi}{3}$ and $\arg z_2 = \frac{\pi}{4}$, then $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) =$ ________.

(a) $\frac{\pi}{12}$ (b) $\frac{3\pi}{8}$

(c) $\frac{2\pi}{7}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

3. $z = 0$ -ல் $f(z) = |z|^2$ என்ற சார்பு ________.

(அ) பகுமுறைச் சார்பு (ஆ) வகையிடத்தக்கது

(இ) வகையிடத்தக்கதல்ல (ஈ) தொடர்ச்சியற்றது

At $z = 0$, the function $f(z) = |z|^2$ is ________.

(a) analytic (b) differentiable

(c) not differentiable (d) not continuous

4. பின்வருவனவற்றுள் எந்த சார்பு எவ்விடத்திலும் வகையீடு செய்ய முடியாத சார்பு?

(அ) $f(z) = z$

(ஆ) $f(z) = z^2$

(இ) $f(z) = \bar{z}$

(ஈ) $f(z) = \begin{cases} \frac{\text{மெய்}\, z}{|z|}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$

Which of the following is no where differentiable function?

(a) $f(z) = z$

(b) $f(z) = z^2$

(c) $f(z) = \bar{z}$

(d) $f(z) = \begin{cases} \frac{\text{Re}\, z}{|z|}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$

5. $w = \frac{1}{z}$ என்ற உருமாற்றத்தில், $a = d = 0$ மற்றும் $b = c$ எனில் அந்த உருமாற்றம் ——————.

(அ) இடமாற்றம் (ஆ) சுழற்சி

(இ) உருப்பெருக்கம் (ஈ) நேர்மாறு

If $a = d = 0$ and $b = c$ in $w = \frac{1}{z}$, then the transformation is ——————.

(a) translation (b) rotation

(c) magnification (d) inversion

6. $w = \frac{1}{z}$ என்ற உருமாற்றத்தின் நிலைப்புள்ளிகள் ——————.

(அ) $z = 1, z = 0$ (ஆ) $z = -1, z = 1$

(இ) $z = 0, z = -1$ (ஈ) $z = 0, z = \infty$

The fixed points of the transformation $w = \frac{1}{z}$ is ——————.

(a) $z = 1, z = 0$ (b) $z = -1, z = 1$

(c) $z = 0, z = -1$ (d) $z = 0, z = \infty$

7. a என்ற மையப்புள்ளியில் r-ஐ ஆரமாகக் கொண்டது C எனில் $\int_C \frac{dz}{z-a}$ -ன் மதிப்பு ——————.

(அ) $2\pi i$ (ஆ) $-2\pi i$

(இ) 0 (ஈ) இவை எதுவுமில்லை

The value of $\int_C \frac{dz}{z-a}$, where C is the circle with centre a and radius r is ——————.

(a) $2\pi i$ (b) $-2\pi i$

(c) 0 (d) none of these

8. C-என்பது $|z| = 2$ என்ற நேர் திசை வட்டம் எனில் $\int_C \frac{dz}{z^2+1} =$ ——————.

(அ) $2\pi i$ (ஆ) πi

(இ) 0 (ஈ) $\frac{\pi}{2} i$

If C is the positively oriented circle $|z| = 2$, then $\int_C \frac{dz}{z^2+1} =$ ——————.

(a) $2\pi i$ (b) πi

(c) 0 (d) $\frac{\pi}{2} i$

9. $\frac{1}{z}$ -ன் சிறப்புப் புள்ளி ————.

(அ) $z=0$ (ஆ) $z=-1$

(இ) $z=\infty$ (ஈ) $z=1$

The singular point of $\frac{1}{z}$ is ————.

(a) $z=0$ (b) $z=-1$

(c) $z=\infty$ (d) $z=1$

10. $z=0$ -ல் $\cot z$ -ன் எச்சம் ————.

(அ) 1 (ஆ) -1

(இ) 0 (ஈ) ∞

The residue of $\cot z$ at $z=0$ is ————.

(a) 1 (b) -1

(c) 0 (d) ∞

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) z_1 மற்றும் z_2 என்பவைகள் சிக்கலெண்கள் எனில், $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$ என நிறுவுக.

If z_1 and z_2 are complex numbers show that $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$.

Or

(ஆ) $1, i, 1+i$ என்ற புள்ளிகள் வழியே செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

Find the equation of the circle passing through the points $1, i, 1+i$.

12. (அ) D-என்ற அரங்கத்தில் $f(z)$ மற்றும் $\overline{f(z)}$ ஆகியவைகள் பகுமுறைச் சார்புகள் எனில் $f(z)$ அந்த அரங்கத்தில் மாறிலி ஆகும் எனக் காட்டுக.

If $f(z)$ and $\overline{f(z)}$ are analytic in a region D show that $f(z)$ is constant in that region.

Or

(ஆ) $f(z)$ என்பது பகுமுறை சார்பு எனில்,

$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=4|f'(z)|^2$ என நிறுவுக.

If $f(z)$ is analytic, prove that

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=4|f'(z)|^2.$$

13. (அ) இரு ஒருபடி மாற்றம் குறுக்குத் தகவை பாதுகாக்கும் என நிறுவுக.

Prove that the cross ratio is preserved by a bilinear transformation.

Or

(ஆ) $w = \frac{1}{z}$-ஐப் பொருத்து நீள்பட்டை $2 < x < 3$-ன் பிம்பத்தைக் காண்க.

Find the image of the strip $2 < x < 3$ under $w = \frac{1}{z}$.

4. (அ) C என்பது $|z - i| = 2$ நேர்திசை வட்டமெனில், $\int_C \frac{e^z}{z^2+4}\, dz$-ஐ மதிப்பிடுக.

If C is the positively oriented circle $|z - i| = 2$, evaluate $\int_C \frac{e^z}{z^2+4}\, dz$.

Or

(ஆ) லியோவில்லிஸ் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove Liouville's theorem.

5. (அ) $\frac{-1}{(z-1)(z-2)}$-ஐ $1 < |z| < 2$-ல் செல்லத்தக்க z-ன் அடுக்குத் தொடரில் விரிவாக்கம் செய்க.

Expand $\frac{-1}{(z-1)(z-2)}$ as a power series in z valid in $1 < |z| < 2$.

Or

(ஆ) ரோச்சஸ் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove Rouche's theorem.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) z_1 மற்றும் z_2 என்ற புள்ளிகள் $z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0$ என்ற வட்டத்தைப் பொருத்து நேர்மாறு புள்ளிகளாக மாற தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $z_1\bar{z}_2 + \bar{\alpha}z_1 + \alpha\bar{z}_2 + \beta = 0$ என நிறுவுக.

Prove that z_1 and z_2 are inverse points with respect to a circle $z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0$ iff $z_1\bar{z}_2 + \bar{\alpha}z_1 + \alpha\bar{z}_2 + \beta = 0$.

Or

(ஆ) z_1, z_2, z_3 என்ற புள்ளிகள் ஓர் சமபக்க முக்கோணத்தின் முனைகள் எனில், $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$ என நிறுவுக.

If the points z_1, z_2, z_3 are the vertices of an equilateral triangle, prove that $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$.

17. (அ) $f(z)=\sqrt{|xy|}$ என்ற சார்பிற்கு, $z=0$ என்ற புள்ளியில் C-R சமன்பாடுகள் பூர்த்தி பெற்றாலும் $f(z)$ வகையிடத்தக்க சார்பாக அப்புள்ளியில் இல்லை என நிறுவுக.

Show that for $f(z)=\sqrt{|xy|}$ the C-R equations are satisfied at $z=0$, but $f(z)$ is not differentiable at $z=0$.

Or

(ஆ) $u(x, y)=e^{-x}\{(x^2-y^2)\cos y+2xy\sin y\}$ என்பது $f(z)$ என்ற பகுமுறைச் சார்பின் மெய்ப் பகுதியாக இருப்பின் $f(z)$ -ஐக் காண்க.

Find the analytic function $f(z)$ if its real part is $u(x, y)=e^{-x}\{(x^2-y^2)\cos y+2xy\sin y\}$.

8. (அ) இரு ஒருபடி உருமாற்றங்கள் அனைத்தும் சேர்க்கையை பொருத்து குலமாகும் என நிறுவுக.

Prove that the set of all bilinear transformations is a group under composition.

Or

(ஆ) நான்கு புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தின் மேல் இருக்குமெனில் அவற்றின் குறுக்கு விகிதம் மெய் மதிப்புக் கொண்டதெனக் காண்பி.

Prove that the cross ratio of four points is real when the points lie on a circle.

19. (அ) கோஷியின் தொகை சூத்திரத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove Cauchy's integral formula.

Or

(ஆ) டெய்லரின் தொடரை எழுதி நிறுவுக.

State and prove Taylor's series.

20. (அ) லோராண்டின் தொடரைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove Laurent's series.

Or

(ஆ) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\sin\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}, (-1<a<1)$ என நிறுவுக.

Prove that $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\sin\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}, (-1<a<1)$.