Reg. No. : ....

Code No. : 10109 **Sub. Code : R 3 MA 64/ B 3 MA 64**

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2013.

Sixth Semester

Mathematics — Main

Paper XV — GRAPH THEORY

(For those who joined in July 2008 to 2011)

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — ($10 \times 1 = 10$ marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer :

1. கோடுகளே இல்லாமல் புள்ளிகள் மட்டும் கொண்ட வரைவின் பெயர்

(அ) முழுமை வரைவு

(ஆ) இரு கூறு வரைவு

(இ) தொடுத்த வரைவு

(ஈ) வெற்று வரைவு

A graph with vertices and without any edge is called

(a) Complete graph

(b) Bipartite graph

(c) Connected graph

(d) Null graph

2. தன் நிரப்பி வரைவில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை

(அ) n + 4 (ஆ) n + 1

(இ) 2n அல்லது 2n + 1 (ஈ) 4n அல்லது 4n + 1

In a self complementary graph G, the number of vertices is

(a) n + 4 (b) n + 1

(c) 2n or 2n + 1 (d) 4n or 4n + 1

3. (7, 6, 5, 4, 3, 2, 1) என்ற வரிசையில் (i) $d_1 = p$ (ii) அனைத்து எண்களும் ஒன்றுக்கொன்று சமமற்றவை. இவ்வரிசை வரைவு வரிசை அல்லாததற்குக் காரணம்

(அ) (i) மட்டும்

(ஆ) (ii) மட்டும்

(இ) (i) மற்றும் (ii)

(ஈ) இவை ஏதுமில்லை

In the sequence (7, 6, 5, 4, 3, 2, 1),

(i) $d_1 = p$

(ii) all the terms are distinct.

This sequence is not graphic because of

(a) (i) only

(b) (ii) only

(c) (i) and (ii)

(d) None of these

4. பின்வருவனவற்றுள் எது சரி?

(அ) ஒரு வரைவில் வெட்டுப் புள்ளி இருந்தால் பாலம் இருக்கும்

(ஆ) ஒரு வரைவில் பாலம் இருந்தால் வெட்டுப் புள்ளி இருக்கும்

(இ) ஒரு வரைவில் எல்லாப் புள்ளிகளும் வெட்டுப் புள்ளிகளாக இருக்க முடியும்

(ஈ) ஒரு வரைவில் எல்லாக் கோடுகளும் பாலங்களாக இருக்க முடியும்

Which of the following is true?

(a) If a graph has a cut point then it has bridge

(b) If a graph has a bridge then it has a cut vertex

(c) In a graph, every vertex can be a cut vertex

(d) In a graph, every edge can be a bridge.

5. மூன்றும் அதற்கு மேலும் புள்ளிகளைக் கொண்ட ஒரு வரை ஹேமில்ட்டோனியனாக இருக்கப் போதுமான நிபந்தனை

(அ) $\delta \geq 2$ (ஆ) $\delta \geq \frac{p}{2}$

(இ) $\Delta \geq \frac{p}{2}$ (ஈ) $\Delta \geq 2$

The sufficent condition for a graph with $P \geq 3$ to be Hamiltonian is

(a) $\delta \geq 2$ (b) $\delta \geq \frac{p}{2}$

(c) $\Delta \geq \frac{p}{2}$ (d) $\Delta \geq 2$

6. G ஒரு தொடுத்த வரைவெனில்

(அ) $w(G) = 1$ (ஆ) $\delta = 1$

(இ) $\Delta = 1$ (ஈ) $\alpha = 1$

If G is a connected graph, then

(a) $w(G) = 1$ (b) $\delta = 1$

(c) $\Delta = 1$ (d) $\alpha = 1$

7. G என்பது r முகங்களையும் K கூறுகளையும் கொண்ட (p, q) தளவரைவு எனில் p – q + r =

(அ) k – 1 (ஆ) k

(இ) k + 1 (ஈ) k + 2

If G is a plane (p, q) graph with r faces and K components then p – q + r =

(a) k – 1 (b) k

(c) k + 1 (d) k + 2

8. $\chi'(K_6) =$

(அ) 3 (ஆ) 4

(இ) 5 (ஈ) 6

$\chi'(K_6) =$

(a) 3 (b) 4

(c) 5 (d) 6

9. $f(K_4, \lambda) = \lambda^4 - k\lambda^3 + \cdots$ எனில் k-இன் மதிப்பு

(அ) 3 (ஆ) 4

(இ) 5 (ஈ) 6

If $f(K_4, \lambda) = \lambda^4 - k\lambda^3 + \cdots$ then k is

(a) 3 (b) 4

(c) 5 (d) 6

10. $f(G, \lambda)$ வில் λ-வின் குணகம் 0 எனில் G யானது

(அ) முழுமை வரைவு (ஆ) இரு பிரிவு வரைவு

(இ) தொடுத்த வரைவு (ஈ) தொடுத்தற்ற வரைவு

If the coefficient of λ is 0 in $f(G,\lambda)$ then G is

(a) Complete (b) Bipartite

(c) Connected (d) Not connected

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) எந்தவொரு வரைவிலும் அனைத்துப் புள்ளிகளின் படிகளின் கூட்டுத்தொகை கோடுகளின் எண்ணிக்கையின் இருமடங்கு என நிறுவுக.

Prove that the sum of the degrees of the points of any graph is twice the number of lines.

Or

(ஆ) $\Gamma(G) = \Gamma(\overline{G})$ என நிறுவுக.

Prove that $\Gamma(G) = \Gamma(\overline{G})$.

12. (அ) (5, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1,) என்பது வரைவு வரிசையா என ஆய்க. ஆம் எனில் ஒரு வரைவினை உருவாக்குக.

Check whether the sequence (5, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1) is graphical. If yes, construct a graph.

Or

(ஆ) 7 கோடுகளைக் கொண்ட 3-தொடுப்பு வரைவு இருக்க முடியாது என நிறுவுக.

Prove that there cannot be a 3-connected graph with 7 edges.

13. (அ) $\delta(G) \geq 2$ எனில் G, ஒரு சுற்றையேனும் கொண்டிருக்கும் என நிறுவுக.

If $\delta(G) \geq 2$, prove that G contains a cycle.

Or

(ஆ) $m \neq n$ எனில் $K_{m,n}$ ஹேமில்ட்டோனியன் அன்று என நிறுவுக.

If $m \neq n$, prove that $K_{m,n}$ is Non-Hamiltonian.

14. (அ) K_5 தள வரைவு அன்று என நிறுவுக.

Prove that K_5 is non-planar.

Or

(ஆ) எந்தவொரு k-வண்ண எண் வரைவிலும் குறைந்த பட்சம் k புள்ளிகள் குறைந்த பட்சம் k–1 படியைக் கொண்டிருக்கும் என நிறுவுக.

Prove that every k-chromatic graph has at least k vertices of degree at least k–1.

15. (அ) G எனும் வரைவு $G_1, G_2, \ldots G_n$ எனும் n கூறுகளைக் கொண்டிருந்தால் $f(G,\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(G_i,\lambda)$ என நிறுவுக. $f(\overline{K}_n,\lambda) = \lambda^n$ எனத் தருவிக்க.

If G is a graph with n components $G_1, G_2, \ldots G_n$, prove that $f(G,\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(G_i,\lambda)$.

Deduce that $f(\overline{K}_n,\lambda) = \lambda^n$.

Or

(ஆ) $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 5\lambda^2 - 1$ என்பது எந்த வரைவின் வண்ணப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகவும் இருக்க முடியாது என நிறுவுக.

Prove that $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 5\lambda^2 - 1$ cannot be the chromatic polynomial of any graph.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) r(m, n)ஐ வரையறுக்க. r(m, n) = r(n, m) என நிரூபிக்க. r(3,3) இன் மதிப்பையும் காண்க.

Define r(m, n). Prove that r(m, n) = r(n, m). Find r(3,3).

Or

(ஆ) கோட்டு வரைவை வரையறுக்க. G ஒரு (p, q) வரைவு எனில் $q_L = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{P} d_i^2\right] - q$ என்க. L(G) ஒரு (q, q_L) வரைவு எனக் காட்டுக. C_5 இன் கோட்டு வரைவை வரைக.

Define Line graph. If G is a (p, q) graph prove that L(G) is a (q, q_L) graph where $q_L = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{P} d_i^2\right] - q$. Draw the line graph of C_5.

17. (அ) ஓர் இரட்டைப்படை எண்ணை $p-1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_p$ என்றிருக்குமாறு P பகுதிகளாகப் பிரித்த $P = (d_1, d_2, \ldots d_p)$ எனும் பிரிப்பு வரைவுப் பிரிப்பாக இருத்தல் என்பது $P' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d1+1} - 1, d_{d1+2}' \ldots d_p)$ எனும் பிரிப்பு வரைவுப் பிரிப்பாக இருந்தால் மட்டுமே இயலும் என நிறுவுக.

A partition $P = (d_1, d_2, \ldots d_p)$ of an even number into p parts with $p-1 \geq d_1 \geq d \geq \cdots \geq d_p$ is graphical iff the modified partition $P' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}' \ldots d_p)$ is graphical.

Or

(ஆ) G எனும் தொடுத்த வரைவில் x ஒரு பாலம் எனில் x எந்தச் சுற்றிலும் இல்லவே இல்லை என நிறுவுக.

Prove that a line x of a connected graph G is a bridge iff x is not on any cycle of G.

18. (அ) ஒரு தொடுத்த வரைவு G யில் பின்வரும் கூற்றுகள் சமானமானவை எனக் காட்டுக.

(i) G ஆய்லீரியன் வரைவு

(ii) G யின் ஒவ்வொரு புள்ளியின் படியும் ஓர் இரட்டைப் படை எண்.

(iii) G யின் கோடுகளைச் சுற்றுகளாகப் பகுக்க முடியும்.

Prove that the following statements are equivalent for a connected graph.

(i) G is Eulerian

(ii) Every point of G has even degree

(iii) The set of edges of G can be partitioned into cycles.

Or

(ஆ) சவட்டால் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபிக்க.

State and prove Chvatal theorem.

19. (அ) G எந்த வரைவானாலும் $x(G) \leq 1 + \max\{\delta(G') : G'$ ஒரு தூண்டப்பட்ட Gயின் உள்வரைவு} என நிறுவுக.

For any graph G, prove that $x(G) \leq 1 + \max\{\delta(G') : G'$ is an induced subgraph of G.}

Or

(ஆ) ஒவ்வொரு தளவரைவும் 5-வண்ணமிடல் வரைவு என நிறுவுக.

Prove that every planar graph is 5-colourable.

20. (அ) G ஒரு (p, q) வரைவு எனில் $f(G,\lambda)$ வில் λ^{p-1} இன் குணகம் –q என நிறுவுக.

If G is a (p, q) graph, prove that the coefficient of λ^{p-1} in $f(G,\lambda)$ is –q.

Or

(ஆ) ஒரு திசை வரைவின் அடுத்த அணி A எனில் A^n இன் (i, j)- உறுப்பு n நீளம் கொண்ட $v_i - v_j$ நடைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் என நிறுவுக.

If A is the adjacency matrix of a digraph prove that $(i, j)^{th}$ entry in A^n is the number of $v_i - v_j$ walks of length n.

———————