Reg. No. : ....

Code No. : 20831 **Sub. Code : GMMA 64/ GMMC 64**

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2018.

Sixth Semester

Mathematics — Main

GRAPH THEORY

(Also common to Maths with CA)

(For those who joined in July 2012–2015)

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL the questions.

Choose the correct answer.

1. தனித்த புள்ளியின் படி ————————.

(அ) 4 (ஆ) 0

(இ) 3 (ஈ) 2

The degree of an isolated point is ————————.

(a) 4 (b) 0

(c) 3 (d) 2

(ஆ) G-ன் வண்ணக் குறியீட்டு எண் என்பதை வரையறு.

K_n குறியீட்டு எண் $= \begin{cases} n & \text{ஒற்றைப்படை} \\ n-1 & n \text{ இரட்டைப்படை} \end{cases}$ என நிரூபி.

Define chromatic index of G. Prove that chromatic index of $K_n = \begin{cases} n & \text{if } n \text{ is odd} \\ n-1 & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$.

20. (அ) ஐந்து வண்ண தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

State and prove five colour theorem.

Or

(ஆ) (i) ஒரு திசை வரைவின் ஜோடி படியினை வரையறு.

(ii) இரண்டு திசை வரைவுகள் ஐசோமார்பிக்காக இருந்தால் அதன் தொடர்புடைய புள்ளிகளுக்கு ஒரே ஜோடி படி இருக்கும் என நிரூபி.

(i) Define degree pair of a digraph.

(ii) If two digraphs are isomorphic then prove that the corresponding points have the same degree pair.

———————

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

2. G_1, G_2 ஆகியன (p_1, q_1), (p_2, q_2) வரைவுகள் எனில் $G_1 \cup G_2$ என்பது ________ வரைவு.

(அ) (p_1, q_2) (ஆ) $(p_1 + p_2, q_1)$

(இ) $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$ (ஈ) (p_2, q_1)

Let G_1 and G_2 be (p_1, q_1) and (p_2, q_2) graphs respectively. Then $G_1 \cup G_2$ is a ________ graph.

(a) (p_1, q_2) (b) $(p_1 + p_2, q_1)$

(c) $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$ (d) (p_2, q_1)

3. C_3 -ல் உள்ள சுற்றின் நீளம் ________.

(அ) 4 (ஆ) 3

(இ) 2 (ஈ) 1

The length of the cycle C_3 is ________.

(a) 4 (b) 3

(c) 2 (d) 1

4. தொடுத்த வரைபில் உள்ள வெட்டுப்புள்ளியின் தொடுயெண் ________.

(அ) 1 (ஆ) 0

(இ) 3 (ஈ) 2

The connectivity of a connected graph with a cut point is ________.

(a) 1 (b) 0

(c) 3 (d) 2

5. K_n ஒரு ஆயிலேரியன் வரைபு எனில் n ஒரு ________.

(அ) இரட்டை எண் (ஆ) ஒற்றை எண்

(இ) (அ) மற்றும் (ஆ) (ஈ) ஏதுமில்லை

K_n is an Eulerian graph then n is ________.

(a) an even number (b) an odd number

(c) (a) and (b) (d) none

6. (p, q) வரைபு G ஒரு மரம் எனில்

(அ) $q = p + 1$ (ஆ) $q = p + 2$

(இ) $p = q + 1$ (ஈ) $p = q - 1$

A (p, q) graph G is a tree if

(a) $q = p + 1$ (b) $q = p + 2$

(c) $p = q + 1$ (d) $p = q - 1$

7. ஒரு மரத்தின் வண்ண எண் ________.

(அ) 6 (ஆ) 4

(இ) 2 (ஈ) 0

The chromatic number of a tree is ________.

(a) 6 (b) 4

(c) 2 (d) 0

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

8. ஒரு மரத்தின் முகங்களின் எண்ணிக்கை

(அ) 2 (ஆ) 3

(இ) ∞ (ஈ) 1

Number of faces of a tree is

(a) 2 (b) 3

(c) ∞ (d) 1

9. $f(\overline{K}_n, \lambda) =$ ______.

(அ) λ^n (ஆ) $\lambda(\lambda-1)$

(இ) $\lambda(\lambda-1)^{n-1}$ (ஈ) ஏதுமில்லை

$f(\overline{K}_n, \lambda) =$ ______.

(a) λ^n (b) $\lambda(\lambda-1)$

(c) $\lambda(\lambda-1)^{n-1}$ (d) none

10. 'n' புள்ளிகளுடைய ஒரு முழுமையான திசை வரைவின் வளைவுகளின் எண்ணிக்கை

(அ) n (ஆ) $n(n+1)$

(இ) $n(n-1)$ (ஈ) $n+1$

The number of arcs in a complete digraph with 'n' points is

(a) n (b) $n(n+1)$

(c) $n(n-1)$ (d) $n+1$

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions choosing either (a) or (b).

11. (அ) எந்த ஒரு தன் நிரப்பு வரைவும் $4n$ அல்லது $4n+1$ புள்ளிகளைக் கொண்டிருக்கும் என நிறுவுக.

Prove that any self complementary graph has $4n$ or $4n+1$ points.

Or

(ஆ) $r(m, n) = r(n, m)$ என நிரூபி.

Prove that $r(m, n) = r(n, m)$.

12. (அ) வரைபுத் தொடர் என்பதை எடுத்துக்காட்டுடன் வரையறு.

Define the graphic sequence with an example.

Or

(ஆ) $\delta \geq \frac{p-1}{2}$ என்ற p புள்ளிகளையுடைய வரைபு G தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

Prove that a graph G with p points and $\delta \geq \frac{p-1}{2}$ is connected.

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

13. (அ) ஒரு படியுள்ள இரண்டு புள்ளிகள் மட்டும் ஒரு மரத்தில் இருந்தால் அது ஒரு பாதை எனக் காட்டுக.

Show that every tree with exactly 2 vertices of degree one is a path.

Or

(ஆ) G என்பது ஒரு ஹாமில்டோனியன் வரைபடம் எனில் $S \subset V(G)$ என்ற ஒவ்வொரு உட்கணத்திற்கும் $\omega(G-S) \leq |S|$ என நிரூபி.

If G is Hamiltonian then prove that for every proper sub-set S of $V(G)$, $\omega(G-S) \leq |S|$.

14. (அ) ஒரே தளத்திலுள்ள வரைபடத்திற்கு குறைந்தது மூன்று முனைகளின் படியானது 6-ஐ விடக் குறைவாக இருக்கும் எனக் காட்டுக.

Prove that every planar graph has atleast three vertices of degree less than 6.

Or

(ஆ) Euler's Polyhedron formula-ஐ எழுதி நிரூபி.

State and prove Euler's Polyhedron formula.

15. (அ) $f(K_n, \lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1)$ என நிரூபி.

Prove that

$f(K_n, \lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1)$.

Or

(ஆ) $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2$ என்பது எந்த வரைவுக்கு வண்ண பல்லுறுப்பு கோவை ஆகாது என காட்டுக.

Show that $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2$ cannot be the chromatic polynomial of any graph.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions choosing either (a) or (b).

16. (அ) நிரூபி :

(i) ஒற்றைப்படி கொண்ட புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை இரட்டையாகும்.

(ii) $\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$

(iii) $r(2, 2) = 2$.

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

Prove :

(i) Number of odd degree vertices is even.

(ii) $\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$

(iii) $r(2, 2) = 2$.

Or

(ஆ) G_1 என்பது (p_1, q_1) வரைவு மற்றும் G_2 என்பது (p_2, q_2) வரைவு என்க. $G_1 \times G_2$ என்பது ஒரு $(p_1 p_2, q_1 p_2 + q_2 p_1)$ வரைவு என காட்டு.

Let G_1 be a (p_1, q_1) graph and G_2 be a (p_2, q_2) graph. Show that $G_1 \times G_2$ is a $(p_1 p_2, q_1 p_2 + q_2 p_1)$ graph.

17. (அ) குறைந்தது இரு புள்ளிகளையுடைய வரைபு G இரு கூறு வரைபாக இருந்தால் இருந்தால் மட்டுமே அதன் எல்லா சுற்றுகளும் இரட்டைப்படை நீளம் உடையதாக இருக்கும் என நிரூபி.

Prove that a graph G with atleast two points is bipartite iff all it's cycles are of even length.

Or

(ஆ) G என்பது ஒரு தொடுத்த வரைபடமாக இல்லை எனில் $\overline{G}$ என்பது ஒரு தொடுத்த வரைபடம் என நிரூபி. இதன் மறுதலையை ஆராய்க.

Prove that if G is disconnected then $\overline{G}$ is connected. Examine the converse.

18. (அ) $C(G)$-ஐ வரையறு. மேலும் $C(G)$ முழுமையாக வரையறுக்கப்பட்டது என நிரூபி.

Define $C(G)$. Also prove $C(G)$ is well defined.

Or

(ஆ) Dirac's தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

State and prove Dirac's theorem.

19. (அ) (i) K_5 என்பது ஒரே தளத்திலுள்ள வரைபடம் அல்ல என நிரூபி.

(ii) எந்தவொரு தொடுத்த ஒருதள (p, q) வரைவு $p \geq 3$ மற்றும் r முகங்களும் உள்ளது எனில் $\frac{3r}{2} \leq q \leq 3p - 6$ என நிரூபி.

(i) Prove that K_5 is non-planar.

(ii) In any connected plane (p, q) graph where $p \geq 3$ with r faces, prove that $\frac{3r}{2} \leq q \leq 3p - 6$.

Or

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam