20. (அ) வில்ஸனின் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

State and prove the Wilson's theorem.

Or

(ஆ) (i) 15!, 17-ஆல் வகுபடும் போது கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

(ii) 2(26!), 29-ஆல் வகுபடும் போது கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

(i) Find the remainder when 15! is divided by 17.

(ii) Find the remainder when 2(26!) is divided by 29.

———————

Reg. No. : ....

Code No. : 20847 **Sub. Code : GMMA 6 A**

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2015.

Sixth Semester

Mathematics — Main

Elective : NUMBER THEORY

(For those who joined in July 2012 and afterwards)

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer.

1. குறையற்ற முழுக்களையுடைய எந்தவொரு வெற்றற்ற கணம் S-ம் ———— ஐப் பெற்றிருக்கும்.

   (அ) பெரிய உறுப்பை (ஆ) சிறிய உறுப்பை

   (இ) மெய் உறுப்பு (ஈ) சிக்கலெண்

   Every non-empty set S of non-negative integers contains a ————.

   (a) largest element (b) least element

   (c) real element (d) complex number

2. பின்வருபவற்றில் எது ஐங்கோண எண்?

(அ) 5 (ஆ) 7

(இ) 11 (ஈ) 13

Which one of the following is a pentagonal number?

(a) 5 (b) 7

(c) 11 (d) 13

3. எந்தவொரு ஒற்றைப்படை முழு எண்ணின் வர்க்கமும் ———— வடிவத்தில் இருக்கும்.

(அ) $2k+1$ (ஆ) $4k+1$

(இ) $6k+1$ (ஈ) $8k+1$

The square of any odd integer is of the form

(a) $2k+1$ (b) $4k+1$

(c) $6k+1$ (d) $8k+1$

4. எது தவறு?

(அ) $a|0$ (ஆ) $1|a$

(இ) $a|a$ (ஈ) ஏதுமில்லை

Which is not correct?

(a) $a|0$ (b) $1|a$

(c) $a|a$ (d) none of these

5. p ஒரு பகா எண், $p|ab$ எனில்

(அ) $p|a$ (ஆ) $p|b$

(இ) (அ) அல்லது (ஆ) (ஈ) (அ) மற்றும் (ஆ)

If p is a prime and $p|ab$ then

(a) $p|a$ (b) $p|b$

(c) (a) or (b) (d) (a) and (b)

6. $\sqrt{2}$ ஒரு

(அ) விகிதமுறு எண் (ஆ) விகிதமுறா எண்

(இ) பகா எண் (ஈ) கற்பனை எண்

$\sqrt{2}$ is a

(a) rational number (b) irrational number

(c) prime number (d) imaginary number

7. –56-ஐ –7-ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் மீதி ————.

(அ) –8 (ஆ) 8

(இ) 7 (ஈ) –7

The remainder when –56 is divided by –7 is

(a) –8 (b) 8

(c) 7 (d) –7

8. $ac \equiv ab \pmod n$ எனில்

(அ) $c = b$ (ஆ) $c \equiv b \pmod n$

(இ) $c \equiv b\left(\bmod \frac{n}{a}\right)$ (ஈ) $c \equiv b\left(\bmod \frac{a}{n}\right)$

If $ac \equiv ab \pmod n$ then

(a) $c = b$ (b) $c \equiv b \pmod n$

(c) $c \equiv b\left(\bmod \frac{n}{a}\right)$ (d) $c \equiv b\left(\bmod \frac{a}{n}\right)$

9. $110 =$ ______________.

(அ) $(1111)_2$ (ஆ) $(110110)_2$

(இ) $(101010)_2$ (ஈ) $(101101)_2$

$110 =$ ______________.

(a) $(1111)_2$ (b) $(110110)_2$

(c) $(101010)_2$ (d) $(101101)_2$

10. p ஒரு பகா எண் எனில், எந்தவொரு முழு எண் a-க்கும்

(அ) $a^p \equiv 1 \pmod p$ (ஆ) $a^p \equiv a \pmod p$

(இ) $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ (ஈ) $a^{p-1} \equiv a \pmod p$

If p is a prime, then for any integer a

(a) $a^p \equiv 1 \pmod p$ (b) $a^p \equiv a \pmod p$

(c) $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ (d) $a^{p-1} \equiv a \pmod p$

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ என்பதை கணித தொகுத்தல் முறையில் தீர்.

Prove by induction that

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Or

(ஆ) ஆர்க்கிமிடியன் பண்பினை எழுதி நிரூபி.

State and prove Archimedean property.

12. (அ) நிரூபி :

(i) $a \mid b, b \neq 0$ எனில் $|a| \leq |b|$.

(ii) $a \mid b, b \mid c$ எனில் $a \mid (bx + cy)$.

Prove that

(i) $a \mid b, b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$

(ii) $a \mid b, b \mid c \Rightarrow a \mid (bx + cy)$.

Or

(ஆ) $(a, b) = 1$, மேலும் $a \mid bc \Rightarrow a \mid c$ என நிரூபி.

If $a \mid bc$ and $(a, b) = 1$ then prove that $a \mid c$.

13. (அ) g.c.d. (a, b) l.c.m. $(a, b) = ab$ என நிரூபி.

Prove that g.c.d. (a, b) l.c.m. $(a, b) = ab$.

Or

(ஆ) ஒரு டையோஃபன்டைன் சமன்பாட்டிற்கு தீர்வுகள் இருப்பதற்கு தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனையைக் கூறி நிரூபி.

State and prove the necessary and sufficient condition for the existence of a solution to the Diophantine equation.

14. (அ) பிதகொரியின் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

State and prove the Pythagoras theorem.

Or

(ஆ) $n \geq 1$ எனில் 2^{2^n} -க்குக் கீழ் குறைந்தது $n+1$ பகா எண்கள் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

Show that for $n \geq 1$, there are atleast $n+1$ primes less than 2^{2^n}.

15. (அ) p ஒரு பகா எண் எனில் $(a+1)^p \equiv (a+1) (\text{mod } p)$ என நிரூபி.

If p is prime, prove that $(a+1)^p \equiv (a+1) (\text{mod } p)$.

Or

(ஆ) p, q ஆகியன இரு வெவ்வேறு பகா எண்கள், $a^p \equiv a (\text{mod } q)$, $a^q \equiv a (\text{mod } p)$ எனில் $a^{pq} \equiv a (\text{mod } pq)$ என நிரூபி.

If p and q are distinct primes with $a^p \equiv a (\text{mod } q)$, $a^q \equiv a (\text{mod } p)$ then prove that $a^{pq} \equiv a (\text{mod } pq)$.

SECTION C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) (i) முடிவுறு தொகுத்தலில் முதல் கொள்கையை எழுதி நிரூபி.

(ii) $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ $(n \geq 1)$ என நிரூபி.

(i) State and prove the first principle of induction.

(ii) Prove that $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ for all $n \geq 1$.

Or

(ஆ) (i) $\binom{n}{k}\binom{k}{r}=\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$, $n \geq k \geq r \geq 0$ என்பதை நிரூபி.

(ii) இதைப் பயன்படுத்தி $\binom{n}{k}=\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$ $n \geq k \geq 1$ என்பதை நிரூபி.

(i) Prove that $\binom{n}{k}\binom{k}{r}=\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$, $n \geq k \geq r \geq 0$.

(ii) Use (i) to prove $\binom{n}{k}=\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$, $n \geq k \geq 1$.

17. (அ) வகுத்தல் படி முறையை எழுதி நிரூபி.

State and prove Division algorithm.

Or

(ஆ) (i) எந்தவொரு முழு எண் a-க்கும் $(a, a+2)=1$ அல்லது 2 எனக் காட்டுக.

(ii) $g.c.d.(198, 243)$-ஐ $198x+243y$ என்ற வடிவத்தில் எழுதுக.

(i) Show that $(a, a+2)=1$ or 2 for all integer a.

(ii) Express $g.c.d.(198, 243)$ in the form of $198x+243y$.

18. (அ) எண்ணியலின் அடிப்படைத் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

State and prove the fundamental theorem of arithmetic.

Or

(ஆ) (i) எரோட்டோஸ்தீனின் ஜல்லடை முறையை விவரி.

(ii) யூக்ளிடின் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

(i) Explain the sieve of Eratosthenes.

(ii) State and prove the Euclid's theorem.

19. (அ) ஒரு எண் 2, 3 மற்றும் 4-ஆல் வகுபட நிபந்தனைகளை அமைத்திடுக.

Establish the conditions that an integer is divisible by 2, 3 and 4.

Or

(ஆ) சைனீஸ் மீதித் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

State and prove the Chinese Remainder theorem.