

(ஆ) எந்தவொரு முடிவறு எண் அரங்கமும் ஒரு புலம் என நிரூபி.

Prove that every finite integral domain is a field.

20. (அ) ஒவ்வொரு மீப்பெரு சீர்வளையமும், பகா சீர்வளையம் என நிரூபி.

Prove that every maximal ideal is a prime ideal.

Or

(ஆ) Z -ல் n ஒரு மீப்பெரு சீர்வளையம் $\Leftrightarrow n$ ஒரு பகா எண் என நிரூபி.

Prove that (n) is a maximal ideal in Z iff n is a prime number.

Reg. No. :

Code No. : 20102

Sub. Code : R 3 MA 41/
R 3 MC 41/B 3 MA 41/
B 3 MC 41

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2012.

Fourth Semester

Mathematics — Main

Paper VI — ABSTRACT ALGEBRA

(Also common to B.Sc. Maths with Computer Applications)

(For those who joined in July 2008 and afterwards)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer :

1. Z ன் மீது $x \sim y \Leftrightarrow x - y, 5$ -ன் மடங்கு எனில் $[2]$ என்ற சமானத் தொகுப்பு
(அ) $\{5k + 2 / k \in Z\}$ (ஆ) $\{2k + 5 / k \in Z\}$
(இ) $\{2k + 5 / k \in N\}$ (ஈ) $\{5k + 2 / k \in N\}$

If ρ is a relation $x\rho y \Leftrightarrow x - y$ is a mutiple of 5 on the equivalence class of [2]

- (a) $\{5k + 2 / k \in \mathbb{Z}\}$ (b) $\{2k + 5 / k \in \mathbb{Z}\}$
(c) $\{2k + 5 / k \in \mathbb{N}\}$ (d) $\{5k + 2 / k \in \mathbb{N}\}$

2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 3$ என்ற சார்பின் நேர்மாறு

- (அ) $3 - x$ (ஆ) $x - 3$
(இ) $1/(2x + 3)$ (ஈ) $1/(x + 3)$

The inverse of the map $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by $f(x) = x + 3$ is

- (a) $3 - x$ (b) $x - 3$
(c) $1/(2x + 3)$ (d) $1/(x + 3)$

3. பின்வரும் கூற்றில் எது தவறானது?

- (அ) எந்த சக்கரகுலமும் அபிலியன்
(ஆ) எந்தவொரு அபிலியன் குலமும் சக்கரக்குலம்
(இ) எந்தவொரு அபிலியன் குலத்திற்கும் $(ab)^2 = a^2b^2$
(ஈ) ஒரு அபிலியன் குலத்திர் உட்கும் இயல் குலமாகும்.

Which one of the following statement is incorrect?

- (a) Any cyclic group is abelian
(b) Any abelian group is cyclic
(c) In any abelian group $(ab)^2 = a^2b^2$
(d) Any sub group of an abelian group is normal.

4. ஈவு குலம் G/N ல் N என்பது

- (அ) G -ன் உட்குலம்
(ஆ) G -ன் சக்கர உட்குலம்
(இ) G -ன் இயல் உட்குலம்
(ஈ) அபிலியன் உட்குலம்

In the quotient group G/N , N is _____.

- (a) a sub group of G
(b) a non-cycle group of G
(c) a normal sub-group of G
(d) non-abelian sub-group of G

5. $f(x) = 2^x, f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$ எனில், f என்ற கோர்த்தலின் உட்கரு.

- (அ) $\{1\}$ (ஆ) $\{0\}$
(இ) $\mathbb{Z}$ (ஈ) $\{1, -1\}$

The Kernal of the homomorphism $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$ defined by $f(x) = 2^x$ is

- (a) $\{1\}$ (b) $\{0\}$
(c) $\mathbb{Z}$ (d) $\{1, -1\}$

6. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ எனில் $\alpha^{-1} =$

(அ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (ஆ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(இ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (ஈ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

If $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ then $\alpha^{-1} =$

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

7. எது புலம் அன்று?

(அ) $(Z, +, \cdot)$ (ஆ) $(Q, +, \cdot)$

(இ) $(R, +, \cdot)$ (ஈ) $(C, +, \cdot)$

Which is not a field?

(a) $(Z, +, \cdot)$ (b) $(Q, +, \cdot)$

(c) $(R, +, \cdot)$ (d) $(C, +, \cdot)$

8. $(Z, +, \cdot)$ என்ற வளையத்தில் _____.

(அ) 1 மட்டுமே அலகு

(ஆ) -1 மட்டுமே அலகு

(இ) 1, -1 அலகு

(ஈ) அலகே இல்லை

In a ring $(Z, +, \cdot)$ _____.

(a) 1 is the only unit

(b) -1 is the only unit

(c) 1 and -1 are the units

(d) There is no unit

9. $(Q, +, \cdot)$ ன் சிறப்பு எண்.

(அ) 0 (ஆ) 8

(இ) 4 (ஈ) 6

The character of $(Q, +, \cdot)$ is

(a) 0 (b) 8

(c) 4 (d) 6

10. R என்ற வளையத்தில் P ஒரு பகா சீர்வளையம் எனில் R/P

(அ) புலம் (ஆ) எண் அரங்கம்

(இ) புலம் அல்ல (ஈ) எண் அரங்கம் அல்ல

If P is a prime ideal of a ring R then R/P is

- (a) a field
- (b) an integral domain
- (c) not a field
- (d) not an integral domain

PART B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) A என்பது n உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணம் என்க.

- (i) A யில் வரையறுக்கக் கூடிய தொடர்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
- (ii) A யில் வரையறுக்கக் கூடிய தற்சுட்டு உறவுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

Let A be a set with n elements.

- (i) Find the number of relation that can be defined on A .
- (ii) Find the number of reflexive relations that can be defined on A .

Or

(ஆ) $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ ஆகியன இரு சார்புகள் எனில்

- (i) $g \circ f$ ஒரு 1-1 $\Rightarrow f$ ஒரு 1-1 எனவும்
- (ii) $g \circ f$ ஒரு மேலானது onto $\Rightarrow g$ ஒரு மேலானது எனவும் நிரூபி.

Let $f: A \rightarrow B$ and $g: B \rightarrow C$ be two functions, prove that

- (i) $g \circ f$ is 1-1 $\Rightarrow f$ is 1-1
- (ii) $g \circ f$ is onto $\Rightarrow g$ is onto.

12. (அ) H, K ஆகியன, G - ன் இரண்டு முடிவுறு

உட்குலங்கள் எனில் $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$ எனக் காட்டுக.

If H, K are two finite subgroups of a group

G , show that $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$.

Or

(ஆ) M, N ஆகியன G ன் நேர்மைம உட்குலங்கள் மற்றும் $M \cap N = \{e\}$ எனில், M -ல் உள்ள ஒவ்வொரு உருப்பும், N -ல் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளோடும் பறிமாற்றம் செய்யும் எனக்காட்டுக.

Let M and N be normal sub group of a group G such that $M \cap N = \{e\}$. Show that every element of M commutes with every element of N .

13. (அ) $f: G \rightarrow G'$ ஒரு செயலொப்புமை எனில்

(i) $f(e) = e'$

(ii) $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$ எனக் காட்டுக.

Let $f: G \rightarrow G'$ be a homomorphism. Prove that

(i) $f(e) = e'$

(ii) $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$.

Or

(ஆ) ஒரு சக்கரக்குலத்தின் செயலொப்புமை பிம்பமும் ஒரு சக்கரக்குலம் என நிரூபி.

Show that any homomorphic image of a cyclic group is cyclic.

14. (அ) எந்தவொரு புலமும் ஒரு எண் அரங்கம் எனக்காட்டுக.

Show that every field is an integral domain.

Or

(ஆ) ஒரு வளையம் R -ல் நீக்கல் விதி உண்மையாக இருந்தால், இருந்தால் மட்டும் அதற்கு பூஜ்ய வகுப்பான்கள் இருக்காது எனக்காட்டுக.

Show that a ring R has no zero divisors iff cancellation law is valid in R .

15. (அ) ஒரு எண் அரங்கத்தின் செயலொப்புமை பிம்பம். ஒரு எண் அரங்கமாக இருக்க வேண்டியதில்லை என நிரூபி.

Prove that the homomorphic image of an integral domain need not be an integral domain.

Or

(ஆ) ஒரு செயலொப்புமையின் உட்கரு ஒரு சீர்வளையம் எனக்காட்டுக.

Show that the kernal of homomorphism is an ideal.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) $f: R \rightarrow (0,1)$, $f(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{x}{1+|x|} \right) \right]$ என்ற

சார்பு ஒன்றுக்கொன்றான மேல்கோர்த்தல் சார்பு என நிரூபி.

Prove that $f: R \rightarrow (0,1)$ defined by

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{x}{1+|x|} \right) \right] \text{ is a bijection.}$$

Or

- (ஆ) $f: A \rightarrow B$ ஒரு ஒன்றுக்கொன்றான மேல் கோர்த்தல் சார்பு என்க. $f^{-1}: B \rightarrow A$ ஒன்றுக்கொன்றான மேல் கோர்த்தல் சார்பு எனவும், $f^{-1} \circ f = i_A$, $f \circ f^{-1} = i_B$ எனவும் நிரூபி.

Let $f: A \rightarrow B$ be a bijection. Prove that $f^{-1}: B \rightarrow A$ is a bijection and $f \circ f^{-1} = i_B$ and $f^{-1} \circ f = i_A$.

17. (அ) லக்ரான்சின் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

State and prove Lagrange's theorem.

Or

- (ஆ) ஆயிலர் மற்றும் பெர்மார்ட்ஸின் தேற்றங்களை எழுதி நிரூபி.

State and prove Euler's and Fermat's theorems.

18. (அ) G ஒரு குலம் என்க. நிரூபி.

(i) $\text{Aut } G$ ஒரு குலம்

(ii) $I(G)$, $\text{Aut } G$ ன் இயல் உட்குலம்

Prove that for any group G ,

(i) $\text{Aut } G$ is a group and

(ii) $I(G)$ is a normal subgroup of $\text{Aut } G$.

Or

- (ஆ) எந்தவொரு முடிவறு குலமும் வரிசைமாற்று குலத்திற்கு சமவொப்புமையுடையது என நிரூபி.

Prove that any finite group is isomorphic to a group of permutations.

19. (அ) Z -ல் $a \oplus b = a + b - 1$, $a \odot b = a + b - ab$ எனில் $(Z, \oplus, \odot)$ ஒரு வளையம் என நிரூபி.

In Z , define $a \oplus b = a + b - 1$, $a \odot b = a + b - ab$, prove that $(Z, \oplus, \odot)$ is a ring.

Or