

20. (அ) $\Gamma(n)$ ஐ வரையறுத்த, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, $n > -1$ எனக் காட்டு. மேலும் $\Gamma(n)$ ன் குவியும் தன்மையை சோதனை செய்.

Define $\Gamma(n)$. Show that $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, $n > -1$. Also test the convergence of $\Gamma(n)$.

Or

- (ஆ) $\int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx$ ஐ காம்மா சார்புகளின் வழி குறிக்கவும். மேலும் $\int_0^1 x^5 (1-x^3)^{10} dx$ யைத் தொகைப்படுத்து.

Express $\int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx$ in terms of Gamma functions and evaluate the integral $\int_0^1 x^5 (1-x^3)^{10} dx$.

Reg. No. :

Code No. : 20820

Sub. Code : GMMA 11/
GMMC 11

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION,
NOVEMBER 2015.

First Semester

Mathematics — Main
CALCULUS

(For those who joined in July 2012 and afterwards)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer.

1. (2, 1) என்ற புள்ளியில் $x^3 + y^3 = 9$ ன் சாய்வு யாது?

- (அ) 0 (ஆ) -4
(இ) 4 (ஈ) ∞

What is the gradient at (2, 1) of $x^3 + y^3 = 9$?

- (a) 0 (b) -4
(c) 4 (d) ∞



2. $r = a\theta$ என்ற வளைவரையில் எந்த ஒரு புள்ளி (r, θ) ல் போலார் உட் செங்கோடு

- (அ) மாறிலி (ஆ) x
(இ) y (ஈ) xy

In the curve $r = a\theta$, the polar subnormal at any point (r, θ) is

- (a) constant (b) x
(c) y (d) xy

3. A, B, C என்பன x, y என்ற மாறிகளால் ஆன சார்பு எனில் $f(x, y, t) = At^2 + Bt + C = 0$ என்ற வளைவரையின் தழுவல் வளைவரை.

- (அ) $B^2 = 4AC$ (ஆ) $A + B = 0$
(இ) $A + B = 0$ (ஈ) $AB = 0$

The envelope of $f(x, y, t) = At^2 + Bt + C = 0$ where A, B, C are functions of x and y is

- (a) $B^2 = 4AC$ (b) $A + B = 0$
(c) $A + B = 0$ (d) $AB = 0$

4. $(1, 1)$ என்ற புள்ளியில் $x^4 + y^4 = 2$ என்ற வளைவரையின் வளைவு ஆரம்

- (அ) 1 (ஆ) $\sqrt{3}$
(இ) $1/\sqrt{3}$ (ஈ) $-\sqrt{2}/3$

What is the radius of curvature of the curve $x^4 + y^4 = 2$ at the point $(1, 1)$?

- (a) 1 (b) $\sqrt{3}$
(c) $1/\sqrt{3}$ (d) $-\sqrt{2}/3$

5. $(x + y)(x - y)(x + 3y + 7) = 3x + 7y - 6$ -ன் தொலைத் தொடுகோடுகளில் ஒன்று

- (அ) $x + 3y + 7 = 0$ (ஆ) $x = 0$
(இ) $y = 0$ (ஈ) $3y + 7y - 6 = 0$

One of the asymptotes of

$$(x + y)(x - y)(x + 3y + 7) = 3x + 7y - 6$$

- (a) $x + 3y + 7 = 0$ (b) $x = 0$
(c) $y = 0$ (d) $3y + 7y - 6 = 0$



6. y அச்சுக்கு இணையான $x^2y - yx^2 + y^2 - 8 = 0$ ன் தொலைத் தொடுகோடு

- (அ) $y = 0$ (ஆ) $x = 0$
(இ) $x = 1$ (ஈ) $x + y = 0$

The asymptote of $x^2y - yx^2 + y^2 - 8 = 0$ parallel to y axis is

- (a) $y = 0$ (b) $x = 0$
(c) $x = 1$ (d) $x + y = 0$

7. $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$ என்ற பகுதியைப் பொருத்து $\iint dy dx$ ன் மதிப்பு

- (அ) $\frac{1}{2}$ (ஆ) $\frac{1}{3}$
(இ) $\frac{1}{4}$ (ஈ) $\frac{-1}{3}$

$\iint dy dx$ over the region $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$ is equal to

- (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$
(c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{-1}{3}$

8. $\int_0^a \int_0^b dx dy$ ன் மதிப்பு

- (அ) $a + b$ (ஆ) ab
(இ) $a - b$ (ஈ) ∞

The value of $\int_0^a \int_0^b dx dy$ is

- (a) $a + b$ (b) ab
(c) $a - b$ (d) ∞

9. $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ ன் மதிப்பு

- (அ) 0 (ஆ) -1
(இ) 1 (ஈ) ∞

$\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ is equal to

- (a) 0 (b) -1
(c) 1 (d) ∞

10. $\Gamma(5)$ ன் மதிப்பு

- (அ) $12\Gamma(2)$ (ஆ) $4\Gamma(2)$
(இ) 10 (ஈ) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$



$\Gamma(5)$ is equal to

- (a) $12\Gamma(2)$ (b) $4\Gamma(2)$
(c) 10 (d) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) $x^2 = 4y$, $y^2 = 4x$ என்ற வளைவரைகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியில் அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

For the curves $x^2 = 4y$ and $y^2 = 4x$, find the angle of intersection.

Or

- (ஆ) இதயவளைவரை $r = a(1 + \cos \theta)$ விற்கு $\frac{ds}{d\theta}$, $\frac{ds}{dr}$ கண்டுபிடி.

Find $\frac{ds}{d\theta}$ and $\frac{ds}{dr}$ for the cardioid $r = a(1 + \cos \theta)$?

12. (அ) 't' ஓர் அலகு எனில், $y + tx = 2at + at^2$ என்ற நேர்கோடுகளின் தழுவல் வளைவரையைக் காண்க.

Find the envelope of the family of straight lines $y + tx = 2at + at^2$, where t is a parameter.

Or

- (ஆ) $r = a(1 - \cos \theta)$ என்ற இதய வளைவரையின் வளைவரை ஆர காண்க.

Find the radius of curvature of the cardioid $r = a(1 - \cos \theta)$.

13. (அ) $r = a(1 - \cos \theta)$ வின் $(p - r)$ -சமன்பாடு $p^2 = r^2/2a$ என நிரூபி.

Prove that the $(p - r)$ -equation of $r = a(1 - \cos \theta)$ is $p^2 = r^2/2a$.

Or

- (ஆ) $(x + y)^2(x + 2y + 2) = x + 9y - 2$ ன் தொலைத்தொடுகோடுகளின் சமபாடுகளைக் காண்க.

Find the asymptotes of

$$(x + y)^2(x + 2y + 2) = x + 9y - 2.$$



14. (அ) முதல்கால் பகுதியில் உள்ள $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டப்பகுதியைப் பொறுத்து $\iint xy dx dy$ யைக் காண்க.

Evaluate $\iint xy dx dy$ over the positive quadrant of the circle $x^2 + y^2 = a^2$.

Or

- (ஆ) போலார் முறைக்க மாற்றி,

$$\int_0^{2a\sqrt{2ax-x^2}} \int_0^{2a\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dx dy \text{ யைக் காண்க.}$$

By changing into polar co-ordinates evaluate

$$\int_0^{2a\sqrt{2ax-x^2}} \int_0^{2a\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dx dy.$$

15. (அ) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$ யைத் தொகைப்படுத்து.

Evaluate $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}.$

Or

- (ஆ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan \theta} d\theta$ வைத் தொகைப்படுத்து.

Evaluate $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan \theta} d\theta.$

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தில் மேல் $P(at^2, 2at)$ என்ற புள்ளியில் வரையும் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டின் சமன்பாடு $y = \frac{x}{t} + at$, $y + tx = 2at + at^3$ எனக் காட்டுக.

At the point $P(at^2, 2at)$ on the parabola $y^2 = 4ax$, show that the equation of the tangent and normal at P are $y = \frac{x}{t} + at$; $y + tx = 2at + at^3$.

Or

- (ஆ) $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ என்ற வளைவரையில் தொடுகோடு, x அச்சு y அச்சு ஆகியவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பகுதி ஓர் மாறிலி, அதன் மதிப்பு a எனக் காட்டுக.

Show that for $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$, the portion in between the tangent, x axis and y axis is equal to a , a constant.



17. (அ) $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தில் மேல் உள்ள 't' என்ற புள்ளியில் $\rho = -2a(1+t^2)^{3/2}$, $X = 2a + 3at^3, y = -2at^3$ எனக் காட்டுக. அதிலிருந்து செங்கோட்டுத் தமுவினின் சமன்பாட்டைத் தருவி.

Show that in the parabola $y^2 = 4ax$, at the point t, $\rho = -2a(1+t^2)^{3/2}$,

$X = 2a + 3at^3, y = -2at^3$. Deduce the equation of the evolute.

Or

- (ஆ) $r^n = a^n \cos n\theta$ என்ற வளைவரையின் வளைவு ஆரம் $\frac{a^n r^{-n+1}}{n+1}$ எனக் காட்டு.

Show that the radius of curvature of the curve $r^n = a^n \cos n\theta$ is $\frac{a^n r^{-n+1}}{n+1}$.

18. (அ) $r = a \sin \theta$ வின் $(p-r)$ - சமன்பாட்டைத் தருவி. அதிலிருந்து அதன் வளைவு ஆரத்தைக் காண். Find the $(p-r)$ -equation of the curve $r = a \sin \theta$ and deduce its the radius of curvature.

Or

Page 10 Code No. : 20820

- (ஆ) $(x-y)(x+y)(x+3y-7) = 2x-3y+1$ தொலைத் தொடுகோடுகள் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

Find the asymptotes of $(x-y)(x+y)(x+3y-7) = 2x-3y+1$.

19. (அ) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ என்ற கோளத்தின் முதலாம் கால்வெட்டுத் துண்டின் வழியாக $\iiint xyz \, dx \, dy \, dz$ ஐ தொகைப்படுத்து.

Evaluate $\iiint xyz \, dx \, dy \, dz$ taken through the positive octant of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Or

- (ஆ) முதல் கால்வட்டப் பகுதியில் $y=0, y=x$, வட்டம் $x^2 + y^2 = 1$ என்பதற்கு உட்பட்ட பகுதி வழியாக $\iint \frac{xy(x+y)^2}{x^2 + y^2} \, dx \, dy$ யை தொகைப்படுத்து.

Evaluate $\iint \frac{xy(x+y)^2}{x^2 + y^2} \, dx \, dy$ over the region in the first quadrant bound by $y=0, y=x$ and the circle $x^2 + y^2 = 1$.

Page 11 Code No. : 20820

