Reg. No. :..

Code No. : 20345 B

Sub. Code : JAMA 21/ SAMA 21/AAMA 21

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2021.

Second/Fourth Semester

Mathematics — Allied

VECTOR CALCULUS AND FOURIER SERIES

(For those who joined in July 2016 onwards)

Time : Three hours — Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer.

1. $\bar{f} = 5u^2\vec{i} + u\vec{j} - u^3\vec{k}$ எனில் $\frac{d\bar{f}}{du}$-ன் மதிப்பு

(அ) $10u\vec{i} + \vec{j} - 3u^2\vec{k}$ (ஆ) $5u^2\vec{i} + \vec{j} - u^3\vec{k}$

(இ) $10u\vec{i} + u\vec{j} - 3u^2\vec{k}$ (ஈ) $10u\vec{i} + \vec{j} - u^3\vec{k}$

If $\bar{f} = 5u^2\vec{i} + u\vec{j} - u^3\vec{k}$ then $\frac{d\bar{f}}{du}$ is

(a) $10u\vec{i} + \vec{j} - 3u^2\vec{k}$ (b) $5u^2\vec{i} + \vec{j} - u^3\vec{k}$

(c) $10u\vec{i} + u\vec{j} - 3u^2\vec{k}$ (d) $10u\vec{i} + \vec{j} - u^3\vec{k}$

2. $\overline{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ எனில் $\nabla \cdot \overline{r}$ -ன் மதிப்பு

(அ) 0 (ஆ) 1

(இ) 2 (ஈ) 3

If $\overline{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, then $\nabla \cdot \overline{r}$ is

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 3

3. $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dydx$ = ____________.

(அ) $\frac{1}{2}$ (ஆ) $\frac{1}{3}$

(இ) $\frac{2}{3}$ (ஈ) $\frac{3}{2}$

$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dydx$ = ____________.

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{2}$

4. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ என்ற கோளத்தால் அடைபடும் பகுதி D எனில் $\iiint\limits_D dxdydz$ -ன் மதிப்பு

(அ) 36π (ஆ) $\frac{4}{3}\pi$

(இ) 324π (ஈ) 972π

The value of $\iiint\limits_D dxdydz$ where D is the region bounded by the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

(a) 36π (b) $\frac{4}{3}\pi$

(c) 324π (d) 972π

5. $\overline{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$, C என்பது $(0, 0)$ மற்றும் $(1, 1)$-ஐ இணைக்கும் நேர்கோடு எனில் $\int\limits_C F \cdot d\overline{r}$ = ___________.

(அ) $\frac{1}{2}$ (ஆ) 0

(இ) 1 (ஈ) 2

If C is the straight line joining $(0, 0)$ and $(1, 1)$ then the value of $\int\limits_C F \cdot d\overline{r}$ where $\overline{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ is

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 0

(c) 1 (d) 2

6. S என்பது V-ஐச் சுற்றியுள்ள மூடிய மேற்பகுதி மற்றும் $\bar{f} = ax\vec{i} + by\vec{j} + cz\vec{k}$ எனில் $\iint_S \bar{f} \cdot \bar{n}\, dS$ -ன் மதிப்பு __________.

(அ) $3V$ (ஆ) 0

(இ) $(a+b+c)^3 V$ (ஈ) $(a+b+c)V$

If S is any closed surface enclosing a volume V and $\bar{f} = ax\vec{i} + by\vec{j} + cz\vec{k}$ then $\iint_S \bar{f} \cdot \bar{n}\, dS$ is __________.

(a) $3V$ (b) 0

(c) $(a+b+c)^3 V$ (d) $(a+b+c)V$

7. ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம் இணைப்பது

(அ) கோட்டுத் தொகையிடல் மற்றும் இரட்டைத் தொகையிடல்

(ஆ) கோட்டுத் தொகையிடல் மற்றும் மேற்பரப்புத் தொகையிடல்

(இ) இரட்டைத் தொகையிடல் மற்றும் மேற்பரப்புத் தொகையிடல்

(ஈ) மேற்பரப்புத் தொகையிடல் மற்றும் கொள்ளளவுத் தொகையிடல்

Stoke's theorem connects

(a) Line integral and double integral

(b) Line integral and surface integral

(c) Double integral and surface integral

(d) Surface integral and volume integral

8. C என்பது $x^2 + y^2 = 1$ எனும் வட்டம் எனில் $\int_C (x-2y)dx + xdy$ -ன் மதிப்பு __________.

(அ) π (ஆ) 2π

(இ) 3π (ஈ) 4π

If C is the circle $x^2 + y^2 = 1$ then $\int_C (x-2y)dx + xdy$ is __________.

(a) π (b) 2π

(c) 3π (d) 4π

9. $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$ என்ற சார்பின் பூரியர் குணகம் a_0 = __________.

(அ) 0 (ஆ) 1

(இ) π (ஈ) π^2

The value of the Fourier Coefficient a_0 for the function $f(x)=x$, $-\pi<x<\pi$ is

(a) 0 (b) 1

(c) π (d) π^2

10. 'n' ஒரு முழு எண் எனில் $\cos n\pi$ = ___________.

(அ) 0 (ஆ) -1

(இ) $+1$ (ஈ) $(-1)^n$

For any integer n, $\cos n\pi$ = ___________.

(a) 0 (b) -1

(c) $+1$ (d) $(-1)^n$

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) $\nabla\phi=(y+\sin z)\vec{i}+x\vec{j}+x\cos z\vec{k}$ எனில் ϕ-ஐ காண்க.

If $\nabla\phi=(y+\sin z)\vec{i}+x\vec{j}+x\cos z\vec{k}$ then find ϕ.

Or

(ஆ) $\bar{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ எனில் $\nabla\times(r^n\bar{r})$-ஐக் காண்க.

If $\bar{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, then find $\nabla\times(r^n\bar{r})$.

12. (அ) $I = \int_0^{\pi} \int_0^{a\cos\theta} r \sin\theta \, dr d\theta$ -ஐ மதிப்பிடுக.

Evaluate $I = \int_0^{\pi} \int_0^{a\cos\theta} r \sin\theta \, dr d\theta$.

Or

(ஆ) $I = \int_0^{\log a} \int_0^{x} \int_0^{x+y} e^{x+y+z} dz dy dx$ -ஐ மதிப்பிடுக.

Evaluate $I = \int_0^{\log a} \int_0^{x} \int_0^{x+y} e^{x+y+z} dz dy dx$.

13. (அ) C என்பது $(0, 0, 0)$ லிருந்து $(2, 1, 3)$ வரை உள்ள நேர்கோடு மற்றும் $\bar{f} = 3x^2\vec{i} + (2xz - y)\vec{j} + z\vec{k}$ எனில் $\int_C \bar{f} \cdot d\bar{r}$ -ஐ காண்க.

Find $\int_C \bar{f} \cdot d\bar{r}$ where $\bar{f} = 3x^2\vec{i} + (2xz - y)\vec{j} + z\vec{k}$ along the straight line from $(0, 0, 0)$ to $(2, 1, 3)$.

Or

(ஆ) S என்பது $z=0$, $z=5$ -ஐ உள்ளடக்கிய உருளை $x^2+y^2=16$ -ன் மேற்புறம் மற்றும் $\bar{f}=z\vec{i}+x\vec{j}-3y^2z\vec{k}$ எனில் $\iint_S \bar{f}\cdot\overline{n}\,dS$ -ன் மதிப்பு காண்க.

Evaluate $\iint_S \bar{f}\cdot\overline{n}\,dS$ where $\bar{f}=z\vec{i}+x\vec{j}-3y^2z\vec{k}$ and S is the surface of the cylinder $x^2+y^2=16$ included in the first octant between $z=0$ and $z=5$.

14. (அ) 'C' என்பது $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$ ஆகிய புள்ளிகளை உச்சிகளாக கொண்ட சதுரம் எனில் $\int_C (x^2-xy^3)dx+(y^2-2xy)dy$ என்பதற்கு கிரீனின் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்க.

Verify Green's theorem for $\int_C (x^2-xy^3)dx+(y^2-2xy)dy$ where C is the square with vertices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ and $(0,2)$.

Or

(ஆ) C என்பது $x^2+y^2=4$; $z=2$ என்ற வளைவு எனில் ஸ்டோக்ஸின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $\int_C \left(e^x dx + 2ydy - dz\right)$-ன் மதிப்பு காண்க.

Evaluate by using Stoke's Theorem $\int_C \left(e^x dx + 2ydy - dz\right)$ where C is the curve $x^2+y^2=4$; $z=2$.

15. (அ) $f(x)=c$ என்ற சார்பின், 0-லிருந்து π வரை உள்ள வீச்சத்தில் Sine தொடரைக் காண்க.

Find a sine series for the function $f(x)=c$ in the range 0 to π.

Or

(ஆ) $f(x)=\begin{cases} 1; & -\pi \le x < 0 \\ -1; & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ எனில் $f(x)=\frac{-4}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + ...\right]$ என நிரூபி.

If $f(x)=\begin{cases} 1; & -\pi \le x < 0 \\ -1; & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ then prove that $f(x)=\frac{-4}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + ...\right]$.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) (i) $(0,1,1)$ என்ற புள்ளியில் $2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ என்ற திசையில் $\phi = x + xy^2 + yz^3$ என்பதற்கான திசை வகைக் கெழுவைக் காண்க.

(ii) $\bar{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ எனில் $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-\bar{r}}{r^3}$ என நிரூபி.

(i) Find the directional derivative of $\phi = x + xy^2 + yz^3$ at $(0,1,1)$ in the direction of $2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

(ii) Prove that $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-\bar{r}}{r^3}$ where $\bar{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Or

(ஆ) $\bar{f}$ என்பது பாய்வற்றது எனில் $curl\,curl\,curl\,curl\,\bar{f} = \nabla^4 \bar{f}$ என நிறுவுக.

If $\bar{f}$ is solenoidal then prove that $curl\,curl\,curl\,curl\,\bar{f} = \nabla^4 \bar{f}$.

17. (அ) இரட்டை தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $x^2 + y^2 = r^2$ என்ற வட்டத்தின் பரப்பளவு காண்க.

Find the area of the circle $x^2 + y^2 = r^2$ by using double integral.

Or

(ஆ) $x + y + z = a$; $x = 0$; $y = 0$, $z = 0$ ஆகிய தளங்களால் அடைபடும் பகுதி D எனில் $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz$ -ஐ மதிப்பிடுக.

Evaluate $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz$, where D is the region bounded by the planes $x + y + z = a$; $x = 0$; $y = 0$ and $z = 0$.

18. (அ) $\overline{F} = 3x^2\vec{i} + (2xz - y)\vec{j} + z\vec{k}$ என்ற சக்திபுலத்தில் $(0, 0, 0)$ மற்றும் $(2, 1, 3)$ இணைக்கும் கோடு வழியாக நகரும் பொருளின் செயல்திறனைக் காண்க.

Find the work done in moving a particle in a force field given by $\overline{F} = 3x^2\vec{i} + (2xz - y)\vec{j} + z\vec{k}$ along the line joining the points $(0, 0, 0)$ to $(2, 1, 3)$.

Or

(ஆ) $\bar{f} = (x^3 - yz)\vec{i} - 2x^2y\vec{j} + 2\vec{k}$ மற்றும் S என்பது $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $x = a$; $y = a$, $z = a$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் கனசதுரம் எனில் $\iint \bar{f} \cdot \bar{n}\, dS$ -ன் மதிப்பு காண்க.

Evaluate $\iint \bar{f} \cdot \bar{n}\, dS$ where $\bar{f} = (x^3 - yz)\vec{i} - 2x^2y\vec{j} + 2\vec{k}$ and S is the surface of the cube bounded by $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $x = a$; $y = a$ and $z = a$.

19. (அ) S என்பது $x^2 + y^2 = a^2$; $z = 0$, $z = 4$ ஆகியவற்றால் உருவான உருளைப் பகுதி மற்றும் $\bar{f} = y\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$ எனில் காஸின் விரிவு தேற்றத்தைச் சரிபார்.

Verify Gauss divergence theorem for $\bar{f} = y\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$ for the cylindrical region S given by $x^2 + y^2 = a^2$; $z = 0$ and $z = 4$.

Or

(ஆ) $\bar{f} = (2x - y)\vec{i} - yz^2\vec{j} - y^2z\vec{k}$ மற்றும் S என்பது $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ என்ற கோளத்தின் மேல் அரைதளம், C என்பது அதன் எல்லை எனில் ஸ்டோக்ஸின் தேற்றத்தைச் சரிபார்.

Verify Stoke's Theorem for $\bar{f} = (2x - y)\vec{i} - yz^2\vec{j} - y^2z\vec{k}$ where S is the upper half surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ and C is the boundary.

20. (அ) $f(x) = x^2$; $-\pi \leq x \leq \pi$ என்ற சார்புக்கு ஃபூரியர் தொடரைக் காண்க.

Find the Fourier series for the function $f(x) = x^2$ where $-\pi \leq x \leq \pi$.

Or

(ஆ) $f(x) = \begin{cases} \pi + 2x, -\pi < x < 0 \\ \pi - 2x, 0 \leq x < \pi \end{cases}$ என்ற சார்புக்கு ஃபூரியர் தொடரைக் காண். மேலும் $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... = \frac{\pi^2}{8}$ என ஊகிக்க.

Find the Fourier series for the function $f(x) = \begin{cases} \pi + 2x & \text{if } -\pi < x < 0 \\ \pi - 2x & \text{if } \ 0 \leq x < \pi \end{cases}$. Hence deduce that $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... = \frac{\pi^2}{8}$.

———————