Reg. No. : ....

Code No. : 10106

Sub. Code : R 3 MA 61/ R 3 MC 61/B 3 MA 61/ B 3 MC 61

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2013.

Sixth Semester

Mathematics — Main

Paper XII — LINEAR ALGEBRA

(Also common to B.Sc. Maths with Computer Applications)

(For those who joined in July 2008 to 2011)

Time : Three hours | Maximum : 75 marks

PART A — $(10 \times 1 = 10$ marks)

Answer ALL the questions.

Choose the correct answer.

1. பின்வருவனவற்றுள் எது சரி?

   (அ) R மீது R எனும் வெக்டர் வெளி C மீது C எனும் வெக்டர் வெளியின் உள்வெளியாகும்

   (ஆ) R மீது C எனும் வெக்டர் வெளி C மீது C எனும் வெக்டர் வெளியின் உள்வெளியாகும்

   (இ) R மீது R எனும் வெக்டர் வெளி R மீது C எனும் வெக்டர் வெளியின் உள்வெளியாகும்

   (ஈ) மேற்கண்ட எதுவும் இல்லை

In an inner product space define norm and prove :

(i) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(ii) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Or

(ஆ) (i) உள்பெருக்கல் வெளி V-யில் $S = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ என்பது பூஜ்யமற்ற செங்குத்து வெக்டர்களின் கணம் எனில் S நேர்கோட்டைச் சாராதது என நிரூபிக்க.

(ii) உள்பெருக்கல் வெளி V-யில் $S = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ என்பது பூஜ்யமற்ற செங்குத்து வெக்டர்களின் கணம் என்க. $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ எனில் $\alpha_k = \dfrac{<v, v_k>}{\|v_k\|^2}$ என நிறுவுக.

(i) If $S = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ is an orthogonal set of non-zero vectors in an inner product space V, prove that S is linearly independent.

(ii) If $S = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ is an orthogonal set of non-zero vectors in an inner product space V and if

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$

then prove that $\alpha_k = \dfrac{<v, v_k>}{\|v_k\|^2}$.

Which of the following is true?

(a) The vector space R over R is a subspace of C over C

(b) The vector space C over R is a subspace of C over C

(c) The vector space R over R is a subspace of C over R

(d) None of these

2. பின்வருவனவற்றுள் $V_3(R)$-இல் கோட்டுத் தொடர்பு உடையது எது?

(அ) $\{(1,0,0),(0,4,0),(2,8,0)\}$

(ஆ) $\{(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\}$

(இ) $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$

(ஈ) $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$

Which of the following is linearly dependent in $V_3(R)$?

(a) $\{(1,0,0),(0,4,0),(2,8,0)\}$

(b) $\{(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\}$

(c) $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$

(d) $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$

3. $\dim_R C =$

(அ) 1 (ஆ) 2

(இ) ∞ (ஈ) இவை ஏதுமில்லை

$\dim_R C =$

(a) 1 (b) 2

(c) ∞ (d) none of these

4. $V = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in R\}$ என்பது R மீதான வெக்டர் வெளியாகும். $W = \{f \in V : f(0) = 0\}$ எனில் $\dim_R W =$

(அ) 0 (ஆ) 1

(இ) 2 (ஈ) 3

$V = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in R\}$ is a vector space over R. If $W = \{f \in V : f(0) = 0\}$ then $\dim_R W$ is

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 3

5. $T : R \to R$ ஒரு ஒருபடி நிலைமாற்றம் எனில் எது நடக்க முடியாதது?

(அ) $T(1)=0$ (ஆ) $T(0)=1$

(இ) $T(1)=2$ (ஈ) $T(2)=1$

If $T:R\rightarrow R$ is a linear transformation which of the following cannot happen?

(a) $T(1)=0$ (b) $T(0)=1$

(c) $T(1)=2$ (d) $T(2)=1$

6. V என்பது படி n மற்றும் அதற்குக் கீழும் கொண்ட மெய்யெண்கள் குணகப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வெக்டர் வெளி என்க. $T:V\rightarrow V$ என்பது $T(f)=\frac{df}{dx}$ எனில் Nullity T, Rank T ஆகியவை முறையே

(அ) $0, n$ (ஆ) $0, n+1$

(இ) $1, n-1$ (ஈ) $1, n$

If V is the vector space of all polynomials with real coefficients of degree $\leq n$ over R and $T:V\rightarrow V$ is the linear transformation defined as $T(f)=\frac{df}{dx}$ then Nullity T and Rank T are respectively

(a) $0, n$ (b) $0, n+1$

(c) $1, n-1$ (d) $1, n$

7. ஒரு ஹெர்மீசியன் அணியில்

(அ) அனைத்து மூலைவிட்ட உறுப்புக்களும் 0

(ஆ) அனைத்து மூலைவிட்ட உறுப்புக்களும் மெய்யெண்கள்

(இ) அனைத்து மூலைவிட்ட உறுப்புக்களும் கற்பனை எண்கள்

(ஈ) அனைத்து உறுப்புக்களும் கற்பனை எண்கள்

In a Hermitian matrix

(a) all the diagonal elements are zero

(b) all the diagonal elements are purely real

(c) all the diagonal elements are purely imaginary

(d) all the elements are purely imaginary

8. $\begin{bmatrix} 3 & 10 & 5 \\ -2 & -3 & -4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ எனும் அணியின் ஐகன் மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகையானது

(அ) 18 (ஆ) -9

(இ) 15 (ஈ) 7

The sum of the eigen values of $\begin{bmatrix} 3 & 10 & 5 \\ -2 & -3 & -4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ is

(a) 18 (b) -9

(c) 15 (d) 7

9. $V_3(R)$-இன் வழக்கமான உள்பெருக்கலில் $(1,2,3)$-இன் செங்குத்து உறுப்பு $(0,3,x)$ எனில் $x=$

(அ) 0 (ஆ) 2

(இ) -2 (ஈ) 3

In $V_3(R)$ with standard inner product, if $(1,2,3)$ is orthogonal to $(0,3,x)$ then x is

(a) 0 (b) 2

(c) -2 (d) 3

10. $V_2(R)$-இன் வழக்கமான உள்பெருக்கல் வெளியில் செங்குத்து ஒரலகு அடிக்கணமானது

(அ) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

(ஆ) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

(இ) $\{(1,0),(-1,0)\}$

(ஈ) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

In $V_2(R)$ with standard inner product, an orthonormal basis is

(a) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

(b) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

(c) $\{(1,0),(-1,0)\}$

(d) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

PART B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL the questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) V என்பது F மீதான வெக்டர் வெளி எனில் நிரூபிக்க :

(i) $\alpha\overline{0}=\overline{0},\ \alpha\in F$

(ii) $0\overline{v}=\overline{0},\ \overline{v}\in V$

(iii) $(-\alpha)\overline{v}=\alpha(-\overline{v})=-(\alpha\overline{v}), \alpha\in F, \overline{v}\in V$.

If V is a vector space over F, prove that

(i) $\alpha\overline{0}=\overline{0},\ \alpha\in F$

(ii) $0\overline{v}=\overline{0},\ \overline{v}\in V$

(iii) $(-\alpha)\overline{v}=\alpha(-\overline{v})=-(\alpha\overline{v}), \alpha\in F, \overline{v}\in V$.

Or

(ஆ) $V_3(R)$ வெக்டர் வெளியில் $\{v_1, v_2, v_3\}$ ஒரு நேர் கோட்டைச் சாராத கணம் எனில் $\{2v_1+v_2, v_1+v_2, v_1-v_3\}$ நேர்கோட்டை சாராத கணம் என நிறுவுக.

If $\{v_1, v_2, v_3\}$ is linearly independent in $V_3(R)$, prove that $\{2v_1+v_2, v_1+v_2, v_1-v_3\}$ is linearly independent.

12. (அ) $S = \{(2,-3,1),(0,1,2),(1,1,2)\}$ எனும் கணம் $V_3(R)$-இன் அடிக்கணமே என நிறுவுக.

Prove that $S = \{(2,-3,1),(0,1,2),(1,1,2)\}$ is a basis for $V_3(R)$.

Or

(ஆ) $V_3(R)$-இல் $\{(1,1,1),(-1,-1,-1)\}$-ஆல் பிறப்பிக்கப்படும் உள்வெளியின் பரிமாணத்தை காண்க.

Find the dimension of the subspace spanned by $\{(1,1,1),(-1,-1,-1)\}$ in $V_3(R)$.

13. (அ) $T: R^2 \to R^2$ என்பது $T(a,b) = (2a-3b, a+4b)$ என்று வரையறுக்கப்பட்டால் T ஒரு ஒருபடி நிலை மாற்றமா எனச் சோதிக்க.

If $T: R^2 \to R^2$ is defined as $T(a,b) = (2a-3b, a+4b)$ verify whether T is a linear transformation.

Or

(ஆ) $T: V_3(R) \to V_3(R)$ எனும் ஒருபடி நிலைமாற்றத்தின் $\{e_1, e_2, e_3\}$-யை ஒட்டிய அணி $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$ எனில் T-யைக் காண்க.

If $T: V_3(R) \to V_3(R)$ is determined by the matrix $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$ with respect to the basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ find T.

14. (அ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ எனும் அணிக்கு கெய்லி–ஹேமில்டன் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்க.

Verify Cayley-Hamilton theorem for the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Or

(ஆ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ எனும் அணிக்குச் சிறப்புச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

Find the characteristic equation of $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

15. (அ) V என்பது உள்பெருக்கல் வெளியாயின் $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left[\|x\|^2+\|y\|^2\right]$ என நிறுவுக.

Prove that $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left[\|x\|^2+\|y\|^2\right]$ in any inner product space V.

Or

(ஆ) வழக்கமான உள்பெருக்கலுடன் கூடிய $V_3(R)$ -இல் $(1,1,-1)$, $(1,0,1)$ ஆகிய உறுப்புக்களுக்குச் செங்குத்தான ஓரலகு உறுப்பினைக் காண்க.

Find a vector of unit length which is orthogonal to $(1,1,-1)$ and $(1, 0, 1)$, in $V_3(R)$ with standard inner product.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL the questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) V என்பது F மீதான வெக்டர் வெளி மற்றும் w என்பது V-யின் உள்வெளி எனில் $\frac{V}{W}=\{W+v, v\in V\}$ என்பது

$$(W+v_1)+(W+v_2)=W+(v_1+v_2),\ \alpha(W+v)=W+\alpha v.$$

என்ற கூட்டல், பெருக்கலின் கீழ் F மீதான வெக்டர் வெளியாகும் என நிறுவுக.

If V is a vector space over F and W is a subspace of V, prove that $\frac{V}{W}=\{W+v, v\in V\}$ is a vector space over F under

$$(W+v_1)+(W+v_2)=W+(v_1+v_2),\ \alpha(W+v)=W+\alpha v.$$

Or

(ஆ) S என்பது V எனும் வெக்டர் வெளியின் உட்கணம் எனில் $L(S)$ என்பது S-ஐ உட்கணமாகக் கொண்ட மீச்சிறு உள்வெளி என நிறுவுக.

If $S\subset V$, prove that $L(S)$ is the smallest subspace containing S.

17. (அ) V என்பது F மீதான வெக்டர்வெளி. $S=\{v_1,v_2,....v_n\}\subseteq V$ எனில் கீழ்க்கண்டவை ஒன்றையொன்று வலியுறுத்துபவை என நிறுவுக :

(i) S என்பது Vயின் அடிக்கணம்

(ii) S என்பது மீப்பெறு நேர்கோட்டைச் சாராத கணம்

(iii) S என்பது மீச்சிறு பிறப்பிக்கும் கணம்.

If V is a vector space over F and $S=\{v_1,v_2,....v_n\}\subseteq V$, prove that the following are equivalent :

(i) S is a basis for V.

(ii) S is a maximal linearly independent set.

(iii) S is a minimal generating set.

Or

(ஆ) R மீதான $C \times C$ வெக்டர் வெளிக்கு $\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ ஓர் அடிக்கணம் என நிறுவுக.

Prove that $\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ is a basis for the vector space $C \times C$ over R.

18. (அ) F என்ற புலத்தின் மீது அமைந்த n பரிமாணம் கொண்ட எந்த வெக்டர் வெளியும் $V_n(F)$-க்குச் சமானமானது என நிறுவுக.

Show that any vector space of dimension n over a field F is isomorphic to $V_n(F)$.

Or

(ஆ) $T: V_3(R) \to V_2(R)$, $T(a,b,c) = (a+b, 2c-a)$ என்ற ஒருபடி நிலை மாற்றத்திற்கு $\{(1,0,-1),(1,1,1),(1,0,0)\}$ மற்றும் $\{(0,1),(1,0)\}$ ஆகிய அடிக்கணங்களைப் பொருத்த அணியினைக் காண்க.

If $T: V_3(R) \to V_2(R)$ is defined by $T(a,b,c) = (a+b, 2c-a)$ find the matrix of T with respect to the bases $\{(1,0,-1),(1,1,1),(1,0,0)\}$ and $\{(0,1),(1,0)\}$.

19. (அ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் ஐகன் மதிப்புகளையும் அவற்றிற்கான ஐகன் வெக்டர்களையும் காண்க.

Find the eigen values and eigen vectors of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Or

(ஆ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு ஐகன் மதிப்புகளையும் ஐகன் வெக்டர்களையும் காண்க.

Find the eigen values and eigen vectors of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

20. (அ) உள்பெருக்கல் வெளியில் அலகினை வரையறுக்க. கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்க :

(i) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(ii) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.