

Reg. No. :

Code No. : 11071

Sub. Code : GAMA 21

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2013.

Second Semester

Mathematics — Allied

VECTOR CALCULUS

(For those who joined in July 2012 onwards)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer:

1. $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ எனில் $\nabla \cdot \vec{r} =$ _____

(அ) 1

(ஆ) 0

(இ) 3

(ஈ) $x^2 + y^2 + z^2$

If $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ then $\nabla \cdot \vec{r} =$ _____

(a) 1

(b) 0

(c) 3

(d) $x^2 + y^2 + z^2$

(ஆ) கீரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, $y = 0$, $x = 1$ மற்றும் $y = x$ ஆல் உருவான மூடிய வளைவு C வழியாக $\int_C (xy - x^2) dx + x^2 y dy$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

Using Green's theorem evaluate $\int_C (xy - x^2) dx + x^2 y dy$ along the closed curve C formed by $y = 0$, $x = 1$, and $y = x$.



2. வெக்டார் சார்பு $\vec{f} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ _____

(அ) பாய்வற்றது

(ஆ) சுழற்சியற்றது

(இ) இசையுடையது

(ஈ) பாய்வுடையது மற்றும் சுழற்சியுடையது

The vector function $\vec{f} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ is _____

(a) solenoidal

(b) irrotational

(c) harmonic

(d) neither solenoidal nor irrotation

3. $\int e^{ax+b} dx =$ _____

(அ) $\frac{1}{b} e^{ax+b}$

(ஆ) $\frac{1}{a} e^{ax+b}$

(இ) $\frac{1}{a} e^{bx+a}$

(ஈ) $\frac{1}{b} e^{bx+a}$

$\int e^{ax+b} dx =$ _____

(a) $\frac{1}{b} e^{ax+b}$

(b) $\frac{1}{a} e^{ax+b}$

(c) $\frac{1}{a} e^{bx+a}$

(d) $\frac{1}{b} e^{bx+a}$

Page 2

Code No. : 11071

4. $\int \cot \theta d\theta =$ _____

(அ) $\log \sin \theta$

(ஆ) $\log \tan \theta$

(இ) $\tan \theta$

(ஈ) $\sin \theta$

$\int \cot \theta d\theta =$ _____

(a) $\log \sin \theta$

(b) $\log \tan \theta$

(c) $\tan \theta$

(d) $\sin \theta$

5. $x = 0, x = 2, y = 0, y = 2$ ஆகியவற்றால் அடைபடும்

பகுதியில், $\iint dx dy$ ன் மதிப்பு _____

(அ) 2

(ஆ) 4

(இ) 0

(ஈ) 3

The value of $\iint dx dy$ over the region bounded by

$x = 0, x = 2, y = 0, y = 2$ is _____

(a) 2

(b) 4

(c) 0

(d) 3

Page 3

Code No. : 11071



6. $\int_0^a \int_0^a \int_0^a dz dy dx$ ன் மதிப்பு —————

- (அ) a^3 (ஆ) a^2
(இ) a (ஈ) 1

The value of $\int_0^a \int_0^a \int_0^a dz dy dx$ is —————

- (a) a^3 (b) a^2
(c) a (d) 1

7. C என்பது $(0,0,0)$ மற்றும் $(1,1,1)$ ஐ இணைக்கும் நேர்கோடு எனில், $\int_C \vec{r} \cdot d\vec{r}$ ன் மதிப்பு —————

- (அ) $\frac{1}{2}$ (ஆ) 1
(இ) $\frac{3}{2}$ (ஈ) 2

If C is the straight line joining $(0,0,0)$ and $(1,1,1)$

then $\int_C \vec{r} \cdot d\vec{r}$ is —————

- (a) $\frac{1}{2}$ (b) 1
(c) $\frac{3}{2}$ (d) 2

8. $\vec{f} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j}$ மற்றும் C என்பது $(0,0)$ மற்றும் $(1,1)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் $y = x^2$ என்ற வளைவரையின் பகுதி எனில் $\int_C \vec{r} \cdot d\vec{r}$ ன் மதிப்பு

- (அ) 0 (ஆ) $\frac{9}{10}$
(இ) $\frac{1}{2}$ (ஈ) 2

If $\vec{f} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j}$ then the value of $\int_C \vec{r} \cdot d\vec{r}$ where C is the part of the curve $y = x^2$ joining the points $(0,0)$ and $(1,1)$ is —————

- (a) 0 (b) $\frac{9}{10}$
(c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

9. V என்பது S என்ற மூடிய மேற்பரப்பினால் உருவான கொள்ளிடம் எனில், $\int_S \vec{r} \cdot \vec{n} dS$ ன் மதிப்பு

- (அ) $3V^2$ (ஆ) $3V$
(இ) $6V$ (ஈ) 0



If V is the volume enclosed by the closed surface S then the value of $\int_S \vec{r} \cdot \vec{n} dS$ is —————

- (a) $3V^2$ (b) $3V$
(c) $6V$ (d) 0

10. கால் விரிவாக்கத் தேற்றம் இணைப்பது

- (அ) கோட்டுத் தொகையிடல் மற்றும் இரட்டைத் தொகையிடல்
(ஆ) கோட்டுத் தொகையிடல் மற்றும் மேற்பரப்புத் தொகையிடல்
(இ) இரட்டைத் தொகையிடல் மற்றும் மேற்பரப்புத் தொகையிடல்
(ஈ) மேற்பரப்புத் தொகையிடல் மற்றும் கொள்ளளவுத் தொகையிடல்

Gauss' divergence theorem connects

- (a) line integral and double integral
(b) line integral and surface integral
(c) double integral and surface integral
(d) surface integral and volume integral

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (அ) $\vec{a}, \vec{b}$ ஆகியன மாறிலி வெக்டார் மற்றும் ω என்பது ஒரு மாறிலி எனும்போது $\vec{r} = \vec{a} \cos \omega t + \vec{b} \sin \omega t$ எனில் $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega(\vec{a} \times \vec{b})$ மற்றும் $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \omega^2 \vec{r} = 0$ என நிறுவுக.

If $\vec{r} = \vec{a} \cos \omega t + \vec{b} \sin \omega t$ where $\vec{a}, \vec{b}$ are constant vectors and ω is a constant prove that $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega(\vec{a} \times \vec{b})$ and $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \omega^2 \vec{r} = 0$.

Or

- (ஆ) $\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{2}{r}$ என நிறுவுக.

Show that $\text{div} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{2}{r}$.

12. (அ) $\int \frac{x^2}{(a+bx)^3} dx$ மதிப்பு காண்க.

Evaluate $\int \frac{x^2}{(a+bx)^3} dx$.

Or



(ஆ) $\int \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$ மதிப்பு காண்க.

Evaluate $\int \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$.

13. (அ) $I = \int_0^{\pi} \int_0^{\cos \theta} \int_0^1 r \sin \theta dr d\theta$ மதிப்பு காண்க.

Evaluate $I = \int_0^{\pi} \int_0^{\cos \theta} \int_0^1 r \sin \theta dr d\theta$.

Or

(ஆ) $\int_0^2 \int_1^3 \int_1^2 xy^2 dz dy dx$ மதிப்பு காண்க.

Evaluate $\int_0^2 \int_1^3 \int_1^2 xy^2 dz dy dx$.

14. (அ) $\vec{f} = x^2\vec{i} - xy\vec{j}$ மற்றும் C என்பது $(0,0)$ மற்றும் $(1,1)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு எனில் $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$ ன் மதிப்பு காண்க.

$\vec{f} = x^2\vec{i} - xy\vec{j}$ and C is the straight line joining the points $(0,0)$ and $(1,1)$ find $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$.

Or

Page 8 Code No. : 11071

(ஆ) S என்பது $z=0$ மற்றும் $z=3$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் கூம்பின் மேற்புறம் $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ எனில் $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ ன் மதிப்பு காண்க.

Evaluate $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ where S is the surface of the cone $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ bounded by $z=0$ and $z=3$.

15. (அ) $x=0, y=0, z=0$ $x=a, y=a$ மற்றும் $z=a$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் கன சதுரத்தில் உள்ள ஒரு வெக்டர் சார்பு $\vec{f} = (x^3 - yz)\vec{i} - 2x^2y\vec{j} + 2z\vec{k}$ க்கு காஸ் விரிவாக்கத் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்க.

Verify Gauss divergence theorem for the vector function $\vec{f} = (x^3 - yz)\vec{i} - 2x^2y\vec{j} + 2z\vec{k}$ over the cube bounded by $x=0, y=0, z=0, x=a, y=a$ and $z=a$.

Or

(ஆ) S என்பது $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ என்ற கோளத்தின் மேல் அரைப்பகுதி மற்றும் $z \geq 0$ எனில் வெக்டர் சார்பு $\vec{f} = y^2\vec{i} + y\vec{j} - xz\vec{k}$ க்கு ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்க.

Verify Stokes theorem for the vector function $\vec{f} = y^2\vec{i} + y\vec{j} - xz\vec{k}$ and S is the upper half of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ and $z \geq 0$.

Page 9 Code No. : 11071



PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions.

16. (அ) (1, 2, 2) என்ற புள்ளியில் $xyz = 4$ என்ற மேற்புறத்தின்

- (i) தொடுதளம்
(ii) செங்குத்து கோடு ஆகியவற்றின் சமன்பாடு காண்க.

Find the equation of the

- (i) tangent plane and
(ii) normal line to the surface $xyz = 4$ at the point (1, 2, 2).

Or

- (ஆ) நிறுவுக $\text{curl}(\text{curl } f) = \text{grad div } f - \nabla^2 f$.

Prove that $\text{curl}(\text{curl } f) = \text{grad div } f - \nabla^2 f$.

17. (அ) மதிப்பு காண்க $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$.

Evaluate $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$.

Or

- (ஆ) மதிப்பு காண்க $\int \frac{dx}{(3+x)\sqrt{x}}$.

Evaluate $\int \frac{dx}{(3+x)\sqrt{x}}$.

18. (அ) D என்பது $x = y^2$, $x = 2 - y$, $y = 0$, $y = 1$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் பகுதி எனில் $I = \iint_D xy dy dx$ ன் மதிப்பு காண்க.

Evaluate $I = \iint_D xy dy dx$ where D is the region bounded by the curve $x = y^2$, $x = 2 - y$, $y = 0$ and $y = 1$.

Or

- (ஆ) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ஆகிய தளங்களால் அடைபடும் டெட்ராகெட்ரான் கொள்ளளவை முப்பரிமானத் தொகையிடல் மூலம் காண்க.

Find by triple integral the volume of the tetrahedron bounded by the planes $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ and $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.



19. (அ) $\vec{f} = (2y+3)\vec{i} + xz\vec{j} + (yz-x)\vec{k}$ மற்றும் C என்பது பின்வரும் பாதைகள் எனில் $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$ ன் மதிப்பு காண்க.

- (i) $x = 2t^2; y = t; z = t^3$ $t = 0$ முதல் $t = 1$ வரை
- (ii) $A = (0,0,0), B = (0,0,1), C = (0,1,1), D = (2,1,1)$ எனும்போது கோட்டுத்துண்டு AB, BC, CD வழியாகச் செல்லும் பலபக்கப்பாதை P யில்
- (iii) $(0,0,0)$ மற்றும் $(2,1,1)$ ஐ இணைக்கும் நேர்கோட்டின் வழியாக.

If $\vec{f} = (2y+3)\vec{i} + xz\vec{j} + (yz-x)\vec{k}$ evaluate $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$ along the following paths C

- (i) $x = 2t^2; y = t; z = t^3$ from $t = 0$ to $t = 1$.
- (ii) The polygonal path P consisting of the three line segments AB, BC, CD where $A = (0,0,0), B = (0,0,1), C = (0,1,1)$ and $D = (2,1,1)$.
- (iii) The straight line joining $(0,0,0)$ and $(2,1,1)$.

Or

Page 12 Code No. : 11071

(ஆ) $\vec{f} = y^2\vec{i} + y\vec{j} - xz\vec{k}$ மற்றும் S என்பது $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ மற்றும் $z \geq 0$ என்ற கோளத்தின் மேல் அரைப்பகுதி எனில் $\int_S (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{n} dS$ ன் மதிப்பு காண்க.

Evaluate $\int_S (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{n} dS$ where

$\vec{f} = y^2\vec{i} + y\vec{j} - xz\vec{k}$ and S is the upper half of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ and $z \geq 0$.

20. (அ) xoy என்ற தளத்தால் அடைபடும் அரைக்கோளம் மற்றும் $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ என்ற கோளத்தின் மேல் அரைப்பகுதிகளில் $\vec{f} = a(x+y)\vec{i} + a(y-x)\vec{j} + z^2\vec{k}$ க்கு காஸ் விரிவாகத் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்க.

Verify Gauss divergence theorem for the function $\vec{f} = a(x+y)\vec{i} + a(y-x)\vec{j} + z^2\vec{k}$ over the hemisphere bounded by the xoy plane and the upper half of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Or

Page 13 Code No. : 11071

