

Reg. No. :

Code No. : 20826

Sub. Code : GMMA 51/
GMMC 51

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION,
NOVEMBER 2016.

Fifth Semester

Mathematics — Main

LINEAR ALGEBRA

(For those who joined in July 2012 – 2015)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer :

1. $T(x, y, z) = (x, y, 0)$ என வரையறுக்கப்பட்ட ஒருபடித்தான உருமாற்றம் $T : V_3(R) \rightarrow V_3(R)$ எனில் $\text{Ker } T =$ _____.

- (அ) $\{(0, 0, z) / z \in R\}$ (ஆ) $\{(0, y, 0) / y \in R\}$
(இ) $\{(x, 0, z) / x, z \in R\}$ (ஈ) $\{(x, y, z) / x, y, z \in R\}$

Prove that the norm defined in an inner product space V has the following properties

- (i) $\|x\| \geq 0$ and $\|x\| = 0$ iff $x = 0$
(ii) $\|ax\| = |a| \|x\|$
(iii) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (Schwartz's inequality)
(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Triangle inequality).



In the linear transformation $T: V_3(R) \rightarrow V_3(R)$ defined by $T(x, y, z) = (x, y, 0)$ then $\text{Ker } T =$ _____.

- (a) $\{(0, 0, z) / z \in R\}$ (b) $\{(0, y, 0) / y \in R\}$
 (c) $\{(x, 0, z) / x, z \in R\}$ (d) $\{(x, y, z) / x, y, z \in R\}$

2. $V_3(R)$ ல் $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ எனில் $L(S) =$ _____

- (அ) S
 (ஆ) $\{(x, y, 0) / x, y \in R\}$
 (இ) $\{(0, y, z) / y, z \in R\}$
 (ஈ) $V_3(R)$

In $V_3(R)$ let $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ then $L(S) =$ _____

- (a) S
 (b) $\{(x, y, 0) / x, y \in R\}$
 (c) $\{(0, y, z) / y, z \in R\}$
 (d) $V_3(R)$

3. $\dim M_2(R) =$ _____

- (அ) 1 (ஆ) 2
 (இ) 3 (ஈ) 4

$\dim M_2(R) =$ _____

- (a) 1 (b) 2
 (c) 3 (d) 4

4. C இன் அடுக்களம்

- (அ) $\{1\}$ (ஆ) $\{i\}$
 (இ) $\{1, i\}$ (ஈ) $\{2, i\}$

The basis of C is

- (a) $\{1\}$ (b) $\{i\}$
 (c) $\{1, i\}$ (d) $\{2, i\}$

5. ஒருபடி சார்புடை கணத்தை உட்கணமாகக் கொண்ட எந்த ஒரு கணமும்

- (அ) ஒருபடி சார்பிலா கணம்
 (ஆ) ஒருபடி சார்புடைக் கணம்
 (இ) ஒருபடி சார்புடை கணம் அல்ல
 (ஈ) ஏதுமில்லை



Any set containing a linearly dependent set is

- (a) a linearly independent
- (b) a linearly dependent set
- (c) not a linearly dependent set
- (d) none of these

6. C ல் $S = (1, i)$, எனில் $L(S) =$ _____

- (அ) S (ஆ) C
- (இ) R (ஈ) $\{a + bi/a, b \in \mathbb{Z}\}$

In C let $S = (1, i)$, then $L(S) =$ _____

- (a) S (b) C
- (c) R (d) $\{a + bi/a, b \in \mathbb{Z}\}$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ என்பதன் சிறப்பியல்பு பல்லுறுப்புக் கோவை

- (அ) $x^2 - 2x + 5$ (ஆ) $x^2 + 2x + 5$
- (இ) $-x^2 - 2x + 5$ (ஈ) $x^2 - 2x - 5$

The characteristic polynomial of $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ is _____.

- (a) $x^2 - 2x + 5$ (b) $x^2 + 2x + 5$
- (c) $-x^2 - 2x + 5$ (d) $x^2 - 2x - 5$

8. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணியில் ஐகன் மதிப்புகள்

- (அ) 1, 2, 3 (ஆ) 2, 3, 4
- (இ) 1, 3, 4 (ஈ) 2, 4, 6

The eigen values of the matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ are

- (a) 1, 2, 3 (b) 2, 3, 4
- (c) 1, 3, 4 (d) 2, 4, 6



9. V என்பது $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ என்று வரையறுக்கப்பட்ட
உள் பெருக்கல் உடைய வெக்டர் வெளி $f(t) = t$ மற்றும்
 $g(t) = t + 1$ எனில் $\langle f, g \rangle =$ _____.

- (அ) $\frac{1}{6}$ (ஆ) $\frac{5}{6}$
(இ) 0 (ஈ) $-\frac{5}{6}$

Let V be a vector space of polynomials with inner
product defined by $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. If $f(t) = t$
and $g(t) = t + 1$ then $\langle f, g \rangle =$ _____.

- (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{5}{6}$
(c) 0 (d) $-\frac{5}{6}$

10. V என்பது ஒரு உட்பெருக்க வெளி எனில் $\{\bar{0}\}^\perp$ என்பதன்
மதிப்பு

- (அ) V (ஆ) ϕ
(இ) $\{\bar{0}\}$ (ஈ) $\bar{0}$

If V is an inner product space, then the value of
 $\{\bar{0}\}^\perp$ is

- (a) V (b) ϕ
(c) $\{\bar{0}\}$ (d) $\bar{0}$

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) F என்ற களத்தின் மேல் V என்பது ஒரு திசையன்
வெளி மற்றும் A, B என்பன V இன் திசையன்
உள்வெளிகள் எனில் $\frac{A+B}{A} \cong \frac{B}{A \cap B}$ எனக்
காட்டுக.

If V is a vector space over a field F and
 A, B are subspaces of V , then show that

$$\frac{A+B}{A} \cong \frac{B}{A \cap B}.$$

Or



(ஆ) V என்பது F என்ற களத்தில் உள்ள வெக்டர் வெளி மற்றும் S என்பது V யின் வெற்றற்ற உட்கணம் எனில், $L(S)$ என்பது V யின் உள்வெளி என நிறுவுக.

Let V be a vector space over a field F and S be a non-empty subset of V . Prove that $L(S)$ is a subspace of V .

12. (அ) முடிவுறு பரிமான வெக்டர்வெளி V யின் இரண்டு அடிமானங்கள் ஒரே எண்ணிக்கையிலான உறுப்புகளை உடையது என நிறுவுக.

Prove that any two bases of a finite dimensional vector space V have the same number of elements.

Or

- (ஆ) $V_3(\mathbb{R})$ என்ற திசையன் வெளியில் $(1, 4, -2)$, $(-2, 1, 3)$ மற்றும் $(-4, 11, 5)$ என்ற திசையன்கள் நேரியல் சார்புள்ளவை என நிறுவுக.

Prove that the vectors $(1, 4, -2)$, $(-2, 1, 3)$ and $(-4, 11, 5)$ are linearly independent in the vector space $V_3(\mathbb{R})$.

13. (அ) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ என்பது $T(a, b) = (2a - 3b, 4b)$ என வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு கேட்டு உருமாற்றம் என நிறுவுக.

Prove that $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ defined by $T(a, b) = (2a - 3b, 4b)$ is a linear transformation.

Or

- (ஆ) திட்ட அடுக்களத்தைப் பொறுத்து

$T: V_2(\mathbb{R}) \rightarrow V_2(\mathbb{R})$, $T(a, b) = (-b, a)$ என்ற நேரியல் உருமாற்றத்திற்கான அணியைக் காண்க.

Find the matrix for the linear transformation $T: V_2(\mathbb{R}) \rightarrow V_2(\mathbb{R})$, by $T(a, b) = (-b, a)$ with respect to standard basis.

14. (அ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ எனில் $A^3 - 2A^2 - 5A + 6I = 0$

என நிறுவுக.

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, then prove that $A^3 - 2A^2 - 5A + 6I = 0$.

Or



(ஆ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணி $A^2 - 2A - 5I = 0$ ஐ நிறைவு செய்யும் என நிறுவுக. மேலும் A^{-1} ஐக் காண்க.

Show that the non-singular matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ satisfies the equation $A^2 - 2A - 5I = 0$. Hence evaluate A^{-1} .

15. (அ) $V_n(C)$ என்பது $\langle x, y \rangle = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \dots + x_n\bar{y}_n$ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ மற்றும் $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ என வரையறுக்கப்பட்ட சிக்கல் உள்பெருக்கல் வெளி என நிறுவுக.

Prove that $V_n(C)$ is a complex inner product space with inner product defined by $\langle x, y \rangle = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \dots + x_n\bar{y}_n$ where $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ and $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Or

- (ஆ) V என்பது உள்பெருக்கல்வெளி மற்றும் S_1, S_2 ஆகியன V ன் உட்கணங்கள் எனில் $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$ என நிறுவுக.

Prove that let V be an inner product space and let S_1 and S_2 be subsets of V . Then $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$.

Page 10 Code No. : 20826

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) ஒன்றிற்குள் ஒன்று இருந்தால் மட்டுமே. ஒரு வெக்டர்வெளியின் இரண்டு உள்வெளிகளின் சேர்ப்பும் ஒரு உள்வெளி ஆகும் என நிறுவுக.

Prove that the union of two subspace of a vector space is a subspace iff one is contained in the other.

Or

- (ஆ) வழக்கமான குறியீடுகளின் கீழ் $L(V, W)$ என்பது ஒரு திசையன் வெளி என நிறுவுக.

Show that $L(V, W)$ is a vector space with usual notations.

17. (அ) V என்பது F என்ற களத்தின் முடிவறு பரிணாமமுடைய வெக்டர் வெளி மற்றும் A என்பது V யின் உள்வெளி எனில் $V = A \oplus B$ என அமையுமாறு B என்ற உள்வெளி இருக்கும் என காட்டுக.

Let V be a finite dimensional vector space over a field F . Let A be a subspace of V . Prove that there exists a subspace B of V such that $V = A \oplus B$.

Or

Page 11 Code No. : 20826



(ஆ) F என்ற களத்தின் எந்தவொரு n பரிமாணமுடைய வெக்டர் வெளியும் $V_n(F)$ க்குச் சமமானது என நிறுவுக.

Prove that any vector space of dimension n over a field F is isomorphic to $V_n(F)$.

18. (அ) F என்ற களத்தின் V, W ஆகியன முடிவுறு பரிமாணமுடைய வெக்டர் வெளிகள் என்க. மேலும் $\dim V = m$ மற்றும் $\dim W = n$ எனில் $L(V, W)$ என்பது களம் F ல் உள்ள mn பரிமாணமுடைய வெக்டர்வெளி எனக் காட்டுக.

Prove that let V and W be two finite dimensional vector spaces over a field F . Let $\dim V = m$ and $\dim W = n$, then $L(V, W)$ is a vector space of dimension mn over F .

Or

(ஆ) செயல்மாறாக் கோர்த்தலின் அடிப்படைத் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and prove fundamental theorem of homomorphism.

19. (அ) ஹெய்லி - ஹாமில்டன் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and prove the Cayley Hamilton theorem.

Or

Page 12 Code No. : 20826

(ஆ) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் ஐகன் மதிப்பு

மற்றும் ஐகன் வெக்டர் காண்க.

Find the eigen values and eigen vectors of

the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

20. (அ) எந்தவொரு முடிவுறு பரிமாண உள்பெருக்கல் வெளியும் செங்குத்து அடிமானம் உடையது என நிறுவுக.

Prove that every finite dimensional inner product space has an orthonormal basis.

Or

(ஆ) உள்பெருக்கல் வெளி V யில் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக

(i) $\|x\| \geq 0$ and $\|x\| = 0$ iff $x = 0$

(ii) $\|ax\| = |a| \|x\|$

(iii) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (ஸ்குவார்டஸ் சமனின்மை)

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (மூக்கோன சமனின்மை).

Page 13 Code No. : 20826

