Reg. No. : ....

Code No. : 20099

Sub. Code : R 3 MA 21/ R 3 MC 21/B 3 MA 21/ B 3 MC 21

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2012.

Second Semester

Mathematics — Main

(Also common to B.Sc. Maths with Computer Applications)

Paper III — ANALYTICAL GEOMETRY OF 3D AND VECTOR DIFFERENTIATION

(For those who joined in July 2008 and afterwards)

Time : Three hours — Maximum : 75 marks

PART A — $(10 \times 1 = 10$ marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer.

1. $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ என்பன ஒரு நேர்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் எனில் $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma =$ ______________.

   (அ) 0 (ஆ) 2

   (இ) 1 (ஈ) ஏதுமில்லை.

If $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ are the d.c.'s of a straight line, then $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma =$ ————.

(a) 0 (b) 2

(c) 1 (d) None.

2. $2x - 3y + z + 2 = 0$ என்ற தளம், ஆய அச்சு தூரங்களை வெட்டுமிடங்கள்

(அ) $1, \frac{2}{3}, 2$ (ஆ) $-1, \frac{2}{3}, -2$

(இ) $1, \frac{-2}{3}, -2$ (ஈ) $-2, 3, -6$.

The plane $2x - 3y + z + 2 = 0$ has the intercepts with the coordinate axes

(a) $1, \frac{2}{3}, 2$ (b) $-1, \frac{2}{3}, -2$

(c) $1, \frac{-2}{3}, -2$ (d) $-2, 3, -6$.

3. $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$ மற்றும் $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-6}{-5}$ என்ற இருகோடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருந்தால், k–ன் மதிப்பு

(அ) $-\frac{10}{7}$ (ஆ) $\frac{10}{9}$

(இ) $\frac{9}{7}$ (ஈ) $\frac{7}{10}$.

If the lines $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$ and $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-6}{-5}$ are perpendicular to each other, then the value of k is

(a) $-\frac{10}{7}$ (b) $\frac{10}{9}$

(c) $\frac{9}{7}$ (d) $\frac{7}{10}$.

4. $x = y$ என்ற தளத்தில் (0, 1, 0) என்ற புள்ளியின் பிம்பம்

(அ) (0, –1, 0) (ஆ) (–1, 0, 0)

(இ) (1, 0, 0) (ஈ) (0, 0, –1).

The image of the point (0, 1, 0) taken in the plane $x = y$ is

(a) (0, –1, 0) (b) (–1, 0, 0)

(c) (1, 0, 0) (d) (0, 0, –1).

5. $\frac{2x+1}{3} = \frac{4y-3}{1} = \frac{2z-3}{0}$ என்ற கோட்டின் மேல் உள்ள புள்ளி ———— ஆகும்.

(அ) (–1, 3, 3) (ஆ) (1, –3, –3)

(இ) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$ (ஈ) $\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-3}{2}\right)$.

A point on the line $\frac{2x+1}{3} = \frac{4y-3}{1} = \frac{2z-3}{0}$ is ________.

(a) $(-1, 3, 3)$ (b) $(1, -3, -3)$

(c) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-3}{2}\right)$.

(−1, 7, 2) என்ற புள்ளியையும் $\frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-2}$ என்ற கோட்டையும் கொண்டுள்ள ஒரு தளத்தின் சமன்பாடு

(அ) $9x - 2y - 6z - 11 = 0$

(ஆ) $9x - 2y - 6z + 11 = 0$

(இ) $9x - 2y + 6z + 11 = 0$

(ஈ) $9x + 2y - 6z + 11 = 0$.

Equation of the plane containing the point $(-1, 7, 2)$ and the line $\frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-2}$ is

(a) $9x - 2y - 6z - 11 = 0$

(b) $9x - 2y - 6z + 11 = 0$

(c) $9x - 2y + 6z + 11 = 0$

(d) $9x + 2y - 6z + 11 = 0$.

7. ஒரு கோளத்தை தளத்தினால் வெட்டும் போது கிடைப்பது ஒரு ________.

(அ) நேர் கோடு (ஆ) கோளம்

(இ) வட்டம் (ஈ) தளம்

The plane section of a sphere is a

(a) straight line (b) sphere

(c) circle (d) plane

8. $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, 0\right)$ என்ற புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு (1, −2, 1) என்ற புள்ளி வழியே செல்லும் கோளத்தின் ஆரம்

(அ) 1 (ஆ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(இ) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (ஈ) $\frac{1}{2}$.

The radius of the sphere with centre at $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, 0\right)$ and passing through $(1, -2, 1)$ is ________.

(a) 1 (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (d) $\frac{1}{2}$.

ஒரு திசையி (வெக்டர்) சார்பின் விரிவு

(அ) திசையி

(ஆ) திசையிலி

(இ) திசையியும் இல்லை திசையிலியும் இல்லை

(ஈ) இவை ஏதுமில்லை.

The divergence of a vector function is

(a) A vector

(b) A scalar

(c) Neither scalar nor vector

(d) None.

). $\overline{F} = (x+z)\overline{i} + (3x+ky)\overline{j} + (x-5z)\overline{k}$ மற்றும்

$div\overline{F} = 0$ எனில், k–ன் மதிப்பு ————————.

(அ) 4 (ஆ) 0

(இ) –4 (ஈ) 2.

If $\overline{F} = (x+z)\overline{i} + (3x+ky)\overline{j} + (x-5z)\overline{k}$ and $div\overline{F} = 0$, then the value of k is ————————

(a) 4 (b) 0

(c) –4 (d) 2.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) ஒரு நகரும் தளம் (α, β, γ) என்ற நிலையான புள்ளி வழியே சென்று அச்சுக்கோடுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. முக்கோணம் ABC–ன் திணிவு மையத்தின் நியமப்பாதை $\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} = 3$ எனக்காட்டுக.

A moving plane passes through a fixed point (α, β, γ) and intersects the coordinate axes at A, B, C. Show that the locus of the centroid of the ΔABC is $\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} = 3$.

Or

(ஆ) ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து $12x - 4y - 3z = 169$ என்ற தளத்திற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளியைக் காண்க.

Find the coordinates of the foot of the perpendicular drawn from the origin to the plane $12x - 4y - 3z = 169$.

12. (அ) $3x + y + z - 6 = 0 = x - y + 2z$

என்ற கோட்டிற்கு இணையாக (1, 2, 3) என்ற புள்ளியின் வழியே செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

Find the equation of the line through the point (1, 2, 3) parallel to the line $3x + y + z - 6 = 0 = x - y + 2z$.

Or

(ஆ) $2x - 3y + 2z + 3 = 0$ என்ற தளத்தில் (1, −2, 3) என்ற புள்ளியின் பிம்பத்தைக் காண்க.

Find the image of the point (1, −2, 3) under the reflection in the plane $2x - 3y + 2z + 3 = 0$.

13. (அ) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-1}{3}$; $\frac{x-1}{-4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-6}{2}$ ஆகிய இரு கோடுகளும் ஒரே தளத்தில் அமைந்துள்ளன என நிரூபித்து, அத்தளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

Prove that the lines $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-1}{3}$; $\frac{x-1}{-4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-6}{2}$ are coplanar and find the equation of the plane in which they lie.

Or

(ஆ) $\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z+1}{7}$;

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+10}{8}$ ஆகிய இரு கோடுகளும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்கின்றன என நிரூபித்து, வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியைக் கண்டுபிடி.

Show that the lines $\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z+1}{7}$ and $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+10}{8}$ intersect each other and find the coordinates of the point of intersection.

14. (அ) (1, 1, −2), (−1, 1, 2) என்ற புள்ளிகளின் வழியே சென்று, $x + y - z - 1 = 0 = 2x - y + z - 2$ என்ற கோட்டில் மையத்தைக் கொண்ட கோளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

Find the equation of the sphere passing through the points (1, 1, −2), (−1, 1, 2) and having its centre on the line $x + y - z - 1 = 0 = 2x - y + z - 2$.

Or

(ஆ) $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$, $(0,0,0)$ ஆகிய புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

Find the equation of the sphere passing through the points $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$ and $(0,0,0)$.

15. (அ) $(2, -1, 1)$ என்ற புள்ளியில் $\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}$ என்னும் வெக்டரின் திசையில் xy^2+yz^3 என்ற சார்பின் திசை வகைக் கெழுவைக் காண்க.

Find the directional derivative of xy^2+yz^3 at the point $(2, -1, 1)$ in the direction of the vector $\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}$.

Or

(ஆ) $grad\,(r^n) = nr^{n-1}\bar{r}$ என நிரூபி.

Prove that $grad\,(r^n) = nr^{n-1}\bar{r}$.

PART C — ($5 \times 8 = 40$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) ஒரு நகரும் தளம் (α, β, γ) என்ற நிலையான புள்ளி வழியே சென்று அச்சுக்களை A, B, C என்ற இடங்களில் வெட்டுகிறது. நான்முகி $OABC$-ன் திணிவு மையத்தின் நியமப்பாதை $\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}=4$ என நிரூபி.

A moving plane passes through a fixed point (α, β, γ) and intersects the coordinate axes at A, B, C. Show that the locus of the centroid of the tetrahedron $OABC$ is $\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}=4$.

Or

(ஆ) (i) $l+m-2n=0$, $2mn-nl+2lm=0$ என்ற இருசமன்பாட்டின் படி திசைக்கொசைன்கள் கொண்ட இருகோடுகளும் செங்குத்தானவை என நிரூபி.

(ii) $(3, -2, 1)$ என்ற புள்ளியையும், $(3, -3, 6)$ என்ற புள்ளியையும் இணைக்கும் கோட்டினை $3:2$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளியைக் கண்டுபிடி.

(i) Show that the lines whose d.c.'s are given by $l+m-2n=0$ and $2mn-nl+2lm=0$ are perpendicular.

(ii) Find the point dividing the line joining $(3, -2, 1)$ and $(3, -3, 6)$ in the ratio $3:2$ internally.

17. (அ) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{-1}$ என்ற கோட்டிலிருந்து $(1, 1, 1)$ என்ற புள்ளிக்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரத்தைக் காண்க. மேலும் செங்குத்துத் தூரத்தின் அடிப்புள்ளியைக் காண்க.

Find the perpendicular distance of the point (1, 1, 1) from the line $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{-1}$. Also, find the foot of the perpendicular.

Or

(ஆ) $2x - y + z + 3 = 0$ என்ற தளத்தில் (1, 3, 4) என்ற புள்ளியின் பிம்பத்தைக் கண்டுபிடி. இனி, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-4}{-3}$ என்ற கோட்டின் பிம்பம் $\frac{x+3}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-2}{-10}$ என நிரூபி.

Find the image of the point (1, 3, 4) in the plane $2x - y + z + 3 = 0$. Hence prove that the image of the line $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-4}{-3}$ is $\frac{x+3}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-2}{-10}$.

18. (அ) $x+y+z-3=0=2x+3y+4z-5$,

$4x-y+5z-7=0=2x-5y-z-3$ ஆகிய இரு கோடுகளும் ஒரே தளத்தில் உள்ளன என நிரூபி. மேலும், இரு கோடுகளும் வெட்டிக் கொள்கின்ற புள்ளியைக் கண்டுபிடித்து, அவ்விரு கோடுகளும் அமைந்துள்ள தளத்தின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

Show that the lines

$x+y+z-3=0=2x+3y+4z-5$ and

$4x-y+5z-7=0=2x-5y-z-3$

are coplanar. Find the coordinates of their point of intersection and the equation of the plane containing them.

Or

(ஆ) $2x - 2y + 3z - 12 = 0 = 2x + 2y + z$;

$2x - z = 0 = 5x - 2y + 9$

ஆகிய கோடுகளுக்கிடையே உள்ள மீச்சிறு தூரத்தைக் கண்டுபிடி.

Find the S.D. between the lines

$2x - 2y + 3z - 12 = 0 = 2x + 2y + z$;

$2x - z = 0 = 5x - 2y + 9$.

19. (அ) ஒரு கோளம் $x - 2y - 2z - 7 = 0$ என்ற தளத்தை (3, −1, 1) என்ற புள்ளியில் தொட்டு (1, 1, −3) என்ற புள்ளியின் வழியே செல்கிறது. அதன் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

A sphere touches the plane $x - 2y - 2z - 7 = 0$ at (3, −1, 1) and passes through (1, 1, −3). Find its equation.

Or

(ஆ) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y = 0$, $x + 2y + 3z = 8$ என்ற வட்டத்தின் வழியாக $4x + 3y = 25$ என்ற தளத்தைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

Find the equation of the sphere which passes through the circle

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y = 0$, $x + 2y + 3z = 8$

and touches the plane $4x + 3y = 25$.

20. (அ) (i) $\varphi = x + xy^2 + yz^3$-ன் திசை வகைக்கெழு (0, 1, 1) என்ற புள்ளியில் $2\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$ என்ற வெக்டரின் திசையில் காண்க.

(ii) $\bar{a}$ ஒரு மாறிலி வெக்டர், $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ எனில் $\nabla \cdot \{(\bar{a} \cdot \bar{r})\bar{r}\} = 4\bar{a} \cdot \bar{r}$ என நிறுவுக.

(i) Find the directional derivative of $\varphi = x + xy^2 + yz^3$ at (0, 1, 1) in the direction of the vector $2\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$.

(ii) If $\bar{a}$ is a constant vector, $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, then show that $\nabla \cdot \{(\bar{a} \cdot \bar{r})\bar{r}\} = 4\bar{a} \cdot \bar{r}$.

Or

(ஆ) (i) $curl(\bar{r} \times \bar{a}) = -2\vec{a}$ ($\vec{a}$ – மாறிலி வெக்டர்) மற்றும்

(ii) $\nabla^2(\log r) = \frac{1}{r^2}$ என நிரூபி. இங்கு $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.

Prove that

(i) $curl(\bar{r} \times \bar{a}) = -2\vec{a}$ where $\vec{a}$ is a constant vector.

(ii) $\nabla^2(\log r) = \frac{1}{r^2}$ where $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.