Reg. No. : ....

Code No. : 20827 **Sub. Code : GMMA 52/ GMMC 52**

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2017.

Fifth Semester

Mathematics — Main

REAL ANALYSIS

(For those who joined in July 2012 to 2015)

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — ($10 \times 1 = 10$ marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer.

1. வழக்கமான மெட்ரிக்கின் கீழ் R-இல் $B(1, 1)$ என்பது

(அ) ϕ (ஆ) $[0, 2]$

(இ) $(0, 2)$ (ஈ) $[0, 2)$

In R with usual metric, $B(1, 1)$ is

(a) ϕ (b) $[0, 2]$

(c) $(0, 2)$ (d) $[0, 2)$

2. முழுக்களின் கணம் ————————.

(அ) எண்ணிடத்தக்கது

(ஆ) எண்ணிடத்தக்கது அல்ல

(இ) முடிவுறு கணம்

(ஈ) ஏதுமில்லை

The set of all integers is ————————.

(a) countable (b) uncountable

(c) a finite set (d) none

3. எது தவறான கூற்று? ————————

(அ) Q எண்ணிடத்தக்கது (ஆ) $D(Z) = \phi$

(இ) $D(Q) = R$ (ஈ) ஏதுமில்லை

Which of the following is incorrect?

(a) Q is countable (b) $D(Z) = \phi$

(c) $D(Q) = R$ (d) None

4. கீழ்கண்ட யாப்பு வெளிகளில் எது முழுமையானது அல்ல?

(அ) R (ஆ) C

(இ) $(0\ 1]$ (ஈ) R^n

Which of the following metric spaces is not complete?

(a) R (b) C

(c) $(0\ 1]$ (d) R^n

5. $f(x) = x^2$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ள $f : R \to R$ என்ற சார்பு ————————.

(அ) தொடர்ச்சியானது

(ஆ) சீரான தொடர்ச்சியானது

(இ) தொடர்ச்சியானதல்ல

(ஈ) (அ) மற்றும் (ஆ)

$f : R \to R$ defined by $f(x) = x^2$ is ————————.

(a) continuous

(b) uniformly continuous

(c) not continuous

(d) both (a) and (b)

6. f என்பது தொடர்ச்சியான இருமை சார்பு எனில், f^{-1} என்பது ————————.

(அ) தொடர்ச்சியானது

(ஆ) தொடர்ச்சியானதல்ல

(இ) தொடர்ச்சியாக இருக்க தேவையில்லை

(ஈ) ஏதுமில்லை

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

If f is a continuous bijection, then f^{-1} ————————.

(a) is continuous

(b) is not continuous

(c) need not be continuous

(d) none

7. $M = [1, 2] \cup [3, 4]$ என்பது ———————— கணம்.

(அ) பிணைக்கப்படாத (ஆ) பிணைக்கப்பட்ட

(இ) அடக்கமான (ஈ) திறந்த

$M = [1, 2] \cup [3, 4]$ is a ———————— set.

(a) disconnected (b) connected

(c) compact (d) open

8. ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட உறுப்புகள் கொண்ட தனித்த யாப்பு வெளி ————————.

(அ) பிணைக்கப்பட்டது (ஆ) பிணைக்கப்படாதது

(இ) தொடர்ச்சியானது (ஈ) ஏதுமில்லை

Any discrete metric space with more than one point is ————————.

(a) connected (b) disconnected

(c) continuous (d) none

9. R-ன் உட்கணம் A-யானது அடக்கமானதாக இருக்கத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனையானது A என்பது ———————— கணம்.

(அ) மூடிய

(ஆ) வரம்புடைய

(இ) திறந்த

(ஈ) மூடிய மற்றும் வரம்புடைய

A subset A of R is compact iff A is a/an ———————— set.

(a) closed (b) bounded

(c) open (d) closed and bounded

10. R-ல் $[0, \infty)$ ————————.

(அ) அடக்கமானது

(ஆ) மூடியது ஆனால் அடக்கமானதல்ல

(இ) திறந்தது

(ஈ) திறந்தது ஆனால் அடக்கமானது அல்ல

In R, $[0, \infty)$ is ————————.

(a) compact

(b) closed but not compact

(c) open

(d) open but not compact

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) Q^+ எண்ணிடத்தக்கது என நிரூபி.

Prove that Q^+ is countable.

Or

(ஆ) வெற்றற்ற கணம் M மீது,

$$d(x, y)=\begin{cases}0 & if \quad x=y\\ 1 & if \quad x\neq y\end{cases}$$

என வரையறு. d என்பது M மீது ஒரு மெட்ரிக் எனக் காட்டு.

On a non-empty set M, define

$$d(x, y)=\begin{cases}0 & if \quad x=y\\ 1 & if \quad x\neq y\end{cases}.$$

Prove that d is a metric on M.

12. (அ) (M, d) ஒரு யாப்பு வெளி என்க. A, B ஆகியன M-ன் உட்கணங்கள் எனில் நிரூபி : $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}\,A \cap \text{Int}\,B$.

Let (M, d) be a metric space. If A and B are subsets of M, then prove that $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}\,A \cap \text{Int}\,B$.

Or

(ஆ) (M, d) என்பது ஒரு யாப்பு வெளி என்க எனில் எந்த ஒரு குவியும் தொடரும் காஷி தொடர் என நிரூபி.

Let (M, d) be a metric space. Show that any convergent sequence is a cauchy sequence.

13. (அ) $f(x)=\frac{1}{x}$ என வரையறுக்கப்பட்ட $f:(0, 1)\to R$ என்ற சார்பு சீரான தொடர்ச்சி சார்பு அல்ல என நிரூபி.

Prove that the function $f:(0, 1)\to R$ defined by $f(x)=\frac{1}{x}$ is not uniformly continuous.

Or

(ஆ) தொடர்ச்சியான சார்பை வரையறு. எடுத்துக்காட்டு தருக.

Define a continuous function. Give an example.

14. (அ) இடைமதிப்பு தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove the intermediate value theorem.

Or

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

(ஆ) தொடர்ச்சியான சார்பின் கீழ் பிணைக்கப்பட்ட கணத்தின் பிம்பமும் பிணைக்கப்பட்டது என நிரூபி.

Show that any continuous image of a connected set is connected.

15. (அ) அடக்கமான வெளியை வரையறு. வழக்கமான மெட்ரிக்கில் R அடக்கமான வெளி அல்ல எனக் காட்டுக.

Define a compact space. Show that R with usual metric is not compact.

Or

(ஆ) ஒரு யாப்பு வெளியின் எந்தவொரு அடக்கமான உட்கணமும் மூடியது என நிரூபி.

Prove that any compact subset of a metric space is closed.

SECTION C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) (0, 1] எண்ணிடத்தக்கதல்ல என நிரூபி.

Prove that (0, 1] is uncountable.

Or

(ஆ) (M, d) ஒரு யாப்பு வெளி என்க. $\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ என வரையறு. d-ம், ρ-ம் சமான மெட்ரிக்குகள் என நிரூபி.

Let (M, d) be a metric space. Define $\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$. Prove that d and ρ are equivalent metrics on M.

17. (அ) காண் :

(i) $D([0, 1))$

(ii) $D(Z)$.

Find :

(i) $D([0, 1))$

(ii) $D(Z)$.

Or

(ஆ) காண்டாரின் வெட்டுத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove Cantor's intersection theorem.

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

18. (அ) f என்பது தொடர்ச்சியானதாக இருக்கத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை எந்தவொரு திறந்த கணத்தின் எதிர்மாறு பிம்பமும் திறந்த கணமாக இருக்கும் என நிரூபி.

Prove that f is continuous if and only if inverse image of every open set is open.

Or

(ஆ) $f:[a, b]\to R$ என்பது ஒரு சீரான சார்பு எனில் $[a, b]$-ல் f தொடர்ச்சியற்றதாக இருக்கும் புள்ளிகளின் கணம் எண்ணத்தக்கது என நிரூபி.

Let $f:[a, b]\to R$ be a monotonic function. Show that the set of points of $[a, b]$ at which f is discontinuous is countable.

19. (அ) R-ன் உள்வெளி பிணைக்கப்பட்டதாக இருக்கத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை அது ஓர் இடைவெளியாக இருக்க வேண்டும் எனக் காட்டுக.

Show that a subspace R is connected if and only if it is an interval.

Or

(ஆ) M என்பது பிணைக்கப்பட்டது என இருந்தால் மட்டுமே $f: M \to \{0, 1\}$ என உள்ள எந்த ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பும் மேலான சார்பாக அமையாது என நிரூபி.

Prove that M is connected if and only if every continuous function $f: M \to \{0, 1\}$ is not onto.

20. (அ) (M, d) என்ற யாப்பு வெளியின் எந்தவொரு அடக்கமான உட்கணமும் மூடியதாக இருக்கும் என நிரூபி.

Prove that any compact subset of a metric space (M, d) is closed.

Or

(ஆ) ஹெயின்-போரல் தேற்றத்தைக் கூறி நிரூபி.

State and prove Heine-Borel theorem.

———————

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam