19. (அ) A ஒரு இணைக்கப்பட்ட உட்கணம், $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. $\overline{A}$ ஒரு இணைக்கப்பட்ட உட்கணம் என்று நிரூபி.

Let A be a connected subset of M, $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Show that $\overline{A}$ is connected.

Or

(ஆ) (i) ஒவ்வொரு இணைக்கப்பட்ட கணத்தின் தொடர்ச்சி இணைக்கப்பட்டது என நிரூபி.

(ii) இடை மதிப்பு தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

(i) Prove that continuous image of a connected set is connected.

(ii) State and prove intermediate value theorem.

20. (அ) ஹெய்ன் போறல் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

State and prove Heine-Borel theorem.

Or

(ஆ) ஒரு கச்சிதமான வெளியின் மீது வரையறுக்கப் பட்ட ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு, சீராக தொடர்ச்சியான சார்பாக இருக்கும் என நிரூபி.

Show that any continuous mapping defined on a compact space is uniformly continuous.

Reg. No. : ....

Code No. : 30103 **Sub. Code : R 3 MA 51/ R 3 MC 51/B 3 MA 51/ B 3 MC 51**

B.Sc.(CBCS). DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2013.

Fifth Semester

Mathematics — Main

Paper VII — REAL ANALYSIS

(Also common to Maths with Computer Applications)

(For those who joined in July 2008 to 2011)

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — ($10 \times 1 = 10$ marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer :

1. d என்பது M மேல் ஒரு மெட்ரிக் எனில் கீழ் வருபனவற்றுள் எது மெட்ரிக் அல்ல

(அ) d^2 (ஆ) $\sqrt{d}$

(இ) $d/(1+d)$ (ஈ) $2d$

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

If d is a metric on M then which one of the following is not metric.

(a) d^2 (b) $\sqrt{d}$

(c) $d/(1+d)$ (d) $2d$

2. M என்பது ஒரு தனித்த மெட்ரிக்வெளி எனில், $B(a,2)$ என்பது

(அ) $\{a\}$ (ஆ) M

(இ) ϕ (ஈ) 2

If M is a discrete metric space then $B(a,2)$ is

(a) $\{a\}$ (b) M

(c) ϕ (d) 2

3. கீழ்வருபவனவற்றுள் எது $\mathbf{R}$ –ல் முடியது?

(அ) Q (ஆ) $(0,3)$

(இ) முடிவுகளம் (ஈ) $[a,b)$

Which one of the following is closed in $\mathbf{R}$

(a) Q (b) $(0,3)$

(c) a finite set (d) $[a,b)$

4. எது சரியல்ல?

(அ) $A \subset \overline{A}$ (ஆ) Int $A \subset A$

(இ) Int $A \subset \overline{A}$ (ஈ) $\overline{A} \subset$ int A

Which is not correct?

(a) $A \subset \overline{A}$ (b) Int $A \subset A$

(c) Int $A \subset \overline{A}$ (d) $\overline{A} \subset$ int A

5. f ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு எனில்,

(அ) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ (ஆ) $f(\overline{A}) \supseteq \overline{f(A)}$

(இ) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ (ஈ) $f(A) = f(\overline{A})$

If f is a continuous function then

(a) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ (b) $f(\overline{A}) \supseteq \overline{f(A)}$

(c) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ (d) $f(A) = f(\overline{A})$

6. கீழ் வருபவனவற்றுள் எது உண்மையல்ல?

(அ) $(0,\infty)$ மற்றும் $\mathbf{R}$ ஒன்றுக்கொன்றான முழுக்கோர்த்தல்

(ஆ) $(0,1)$ மற்றும் $(0,\infty)$ ஒன்றுக்கொன்றான முழுக்கோர்த்தல்

(இ) $[0,1]$ மற்றும் $[a,b]$ ஒன்றுக்கொன்றான முழுக்கோர்த்தல்

(ஈ) வழக்கமான மெட்ரிக் வெளி $\mathbf{R}$ மற்றும் தனித்த மெட்ரிக் வெளி ஒன்றுக்கொன்றான முழுகோர்த்தல்

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

Which of the following is not correct

(a) $(0,\infty)$ and **R** are homeomorphic

(b) $(0,1)$ and $(0,\infty)$ are homeomorphic

(c) $[0,1]$ and $[a,b]$ are homeomorphic

(d) **R** with usual and discrete metric are homeomorphic

7. எது உண்மையல்ல?

(அ) A இணைப்பு உட்பணமெனில் $\overline{A}$ –ம் இணைப்பு உட்கணம்

(ஆ) **R** –ன் ஒரு இணைப்பு உட்கணம், எண்ணிடத்தக்கதல்ல

(இ) A –இணைப்பு உட்கணமெனில், A^C இணைப்பு உட்கணம்

(ஈ) **R** –ன் ஒரு இணைப்பு உட்கணம், ஒரு இடைவெளி ஆகும்

Which of the following is not true?

(a) If A is connected then $\overline{A}$ is connected

(b) A connected subset of **R** is uncountable

(c) If A is connected then A^C is connected

(d) A connected subset of **R** is an interval

8. M ஒரு இணைப்பு கணமெனில், ஒவ்வொரு தொடர்ச்சியான சார்பு $f : M \to \{0,1\}$

(அ) மேலானது (ஆ) மேலானதல்ல

(இ) $1-1$ (ஈ) $1-1$ அல்ல

If M is connected then every continuous function $f : M \to \{0,1\}$ is

(a) onto (b) not onto

(c) $1-1$ (d) not $1-1$

9. Q என்பது

(அ) கச்சிதமானது

(ஆ) வரம்புடையது

(இ) முற்றிலும் வரம்புடையது

(ஈ) எதுவுமில்லை

Q is

(a) compact (b) bounded

(c) totally bounded (d) none

10. $\{(-n,n) / n \in \mathbf{N}\}$ ஒரு திறந்த மறைப்பு

(அ) **N** (ஆ) Z

(இ) **R** (ஈ) Q

$\{(-n,n) / n \in \mathbf{N}\}$ is an open cover for

(a) **N** (b) Z

(c) **R** (d) Q

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) ஒரு மெட்ரிக் வெளியில் முடிவுறு எண்ணிக்கையுள்ள திறந்த கணங்களின் வெட்டுக் கணமும் திறந்த கணம் என நிரூபி.

In any metric space prove that finite intersection of open sets is open.

Or

(ஆ) ஒரு தனிந்த மெட்ரிக் வெளியில் திறந்த பந்துக்களை விவரி.

Describe the open balls in a discrete metric space.

12. (அ) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ என நிரூபி. A, B என்பன $\mathbf{R}$-ன் உட்கணங்கள்.

Prove that $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ where A, B are subsets of $\mathbf{R}$.

Or

(ஆ) $\overline{A}$ - ல் x இருக்க, இருந்தால் மட்டும் A - ல் (x_n) என்ற தொடர்ச்சி $(x_n) \to x$ ஆக கிடைக்கும் என நிரூபி.

Prove that $x \in \overline{A}$ iff there exists a sequence (x_n) in A such that $(x_n) \to x$.

13. (அ) $f : M_1 \to M_2$ தொடர்சார்பாக இருக்க இருந்தால் மட்டும் M_2-ல் F ஒரு மூடியகணம் M_1-ல் $f^{-1}(F)$ மூடியகணமாக இருக்கும் என நிரூபி.

Prove that $f : M_1 \to M_2$ is continuous iff $f^{-1}(F)$ is closed in M_1 whenever F is closed in M_2.

Or

(ஆ) $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ஒரு monotonic சார்பு f - ன் தொடர்பிலா புள்ளிகளின் கணம் எண்ணிடத்தக்கது என நிரூபி.

Let $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ be a monotonic function. Prove that set of points of $[a, b]$ at which f is discontinuous is countable.

14. (அ) வரையறு இணைக்கப்பட்ட கணம். ஒரு புள்ளிக்கு மேல் எந்த தனித்த மெட்ரிக் வெளியும் இணைக்கப்படாதது என நிரூபி.

Define a connected space. Prove that any discrete metric space with more than one point is disconnected.

Or

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

(ஆ) கீழ்வருபவனவற்றுள் $\mathbf{R}$ ன் – இணைக்கப்பட்ட கணங்கள் எவையென காரணத்துடன் தீர்மானி.

(i) $[4,6] \cup [8,10]$

(ii) $[4,5] \cap [5,7]$

(iii) Q

(iv) $[a, b]$

Determine which of the following are connected subsets of $\mathbf{R}$. Give reasons.

(i) $[4,6] \cup [8,10]$

(ii) $[4,5] \cap [5,7]$

(iii) Q

(iv) $[a, b]$.

15. (அ) கச்சிதமான கணத்தின் தொடர் பிம்பமும் கச்சிதமானது என நிரூபி.

Prove that continuous image of a compact metric space is compact.

Or

(ஆ) l_2–ல் மூடிய வரம்புடைய கச்சிதமில்லாத உட்கணத்திற்கு எடுத்துக்காட்டு தருக.

Give an example of a closed and bounded subset of l_2 which is not compact.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) $p \geq 1$ $\sum_{1}^{\infty} |x_n|^p$ குவியாகவுள்ள தொடர் வரிசைகள் (x_n) ஐ அடங்கியுள்ள கணம் l_p $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ என்ற தொடர்வரிசைக்கு வரையறு $d(x, y) = \left(\sum_{1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{1/p}$ ஒரு மெட்ரிக் என நிரூபி.

For $p \geq 1$, let l_p denote the set of all sequences (x_n) such that $\sum_{1}^{\infty} |x_n|^p$ is convergent. Define $d(x, y) = \left(\sum_{1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{1/p}$ where $x = (x_n)$ and $y = (y_n)$. Prove that d is a metric on l_p.

Or

(ஆ) (M, d) ஒரு மெட்ரிக் வெளி வரையறு $\rho(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ எனில். d மற்றும் ρ சரிசமம் உடைய மெட்ரிக் என நிரூபி.

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

Let (M,d) be a metric space. Define $\rho(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Prove that d and ρ are equivalent matrices on M.

17. (அ) M ஒரு மெட்ரிக் வெளி, $A \subseteq M$, $\overline{A} = A \cup D(A)$ என நிருபி.

Let M be a metric space and $A \subseteq M$. Show that $\overline{A} = A \cup D(A)$.

Or

(ஆ) பேரின் பண்புகுழு தேற்றத்தை எழுதி நிருபி.

State and prove Baire's Category theorem.

18. (அ) (i) வரையறு a என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியான சார்பு.

(ii) $f : M_1 \to M_2$ ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பாக இருந்தால் மட்டும் $(x_n) \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$, எல்ல புள்ளி x

(i) Define continuity of a function at a point.

(ii) Show that a function $f : M_1 \to M_2$ is continuous iff $(x_n) \to x$ implies $f(x_n) \to f(x)$.

Or

(ஆ) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ வேரளவை எண் என்றால்} \\ 1, & x \text{ வேரளவை அல்லா எண் என்றால்} \end{cases}$$

தொடர்ச்சியல்லா சார்பு என கீழ்க்கண்ட ஏதேனும் இரு வழிகளில் நிறுவுக.

(i) $\in, \delta$ வழி.

(ii) G என்ற ஒரு திறந்தகணம், ஆனால் $f^{-1}(G)$ திறந்தகணமல்ல என்று

(iii) $\mathbf{R}$ –ன் ஒரு உட்கணம், A, $f(\overline{A}) \not\subset \overline{f(A)}$.

Show that the function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ defined by $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ if } x \text{ is irrational} \\ 1 \text{ if } x \text{ is rational} \end{cases}$ is not continuous by any two of the following methods.

(i) by the usual $\in, \delta$ method.

(ii) by exhibiting an open set G such that $f^{-1}(G)$ is not open.

(iii) by exhibiting a subset A of $\mathbf{R}$ such that $f(\overline{A}) \not\subset \overline{f(A)}$.

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam