(8 pages) **Reg. No. :** ....

Code No. : 20827 **Sub. Code : GMMA 52/ GMMC 52**

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2016.

Fifth Semester

Mathematics — Main

REAL ANALYSIS

(For those who joined in July 2012 – 2015)

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer :

1. விகிதமுறா எண்களின் கணம் ————

(அ) எண்ணிடத்தக்கது (ஆ) எண்ணிடத்தக்கதல்ல

(இ) வரம்புறு (ஈ) ஏதுமில்லை

The set of all irrotational number is ————

(a) Countable (b) Uncountable

(c) Bounded (d) None of these

2. முடிவுறா இடைவெளி $(-\infty, a]$ = ————

(அ) $\{x : x > a\}$ (ஆ) $\{x : x \geq a\}$

(இ) $\{x : x < a\}$ (ஈ) $\{x : x \leq a\}$

Infinite interval $(-\infty, a]$ = ————

(a) $\{x : x > a\}$ (b) $\{x : x \geq a\}$

(c) $\{x : x < a\}$ (d) $\{x : x \leq a\}$

3. வழக்கமான யாப்பு வெளி R ல், தவறான கூற்று ————

(அ) $Int\, N = \phi$ (ஆ) $Int\, z = \phi$

(இ) $Int\, \phi = \phi$ (ஈ) $Int\, R = \phi$

In R with usual metric the incorrect statement is ————

(a) $Int\, N = \phi$ (b) $Int\, z = \phi$

(c) $Int\, \phi = \phi$ (d) $Int\, R = \phi$

4. Z - ன் மூடுதல்

(அ) Z (ஆ) ϕ

(இ) R (ஈ) ஏதுமில்லை

The closure of Z is ————.

(a) Z (b) ϕ

(c) R (d) None

5. $f : (M_1, d_1) \to (M_2, d_2)$ என்க a எனும் புள்ளியில் f தொடர்ச்சியானது $\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x)$ = ————

(அ) $f(x)$ (ஆ) 0

(இ) 1 (ஈ) $f(a)$

Let $f : (M_1, d_1) \to (M_2, d_2)$ f is continuous at a $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to a} f(x)$ = ————

(a) $f(x)$ (b) 0

(c) 1 (d) $f(a)$

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

6. $f(x) = 2x, g(x) = \cos x$ எனில் $g.f(x) =$ ————

(அ) $\cos 2x$ (ஆ) $2\cos x$

(இ) $2\cos 2x$ (ஈ) ஏதுமில்லை

$f(x) = 2x, g(x) = \cos x$ then $g.f(x) =$ ————

(a) $\cos 2x$ (b) $2\cos x$

(c) $2\cos 2x$ (d) None of these

7. வழக்கமான மெட்ரிக்கில் $M = [1,2] U [3,4]$ எனில் M இல் $[1,2]$ என்பது

(அ) திறந்தது (ஆ) மூடியது

(இ) (அ) மற்றும் (ஆ) (ஈ) ϕ

If $M = [1,2] U [3,4]$ with usual metric, then in $M[1,2]$ is

(a) Open (b) Closed

(c) (a) and (b) (d) ϕ

8. ஒரு உள்வெளி பிணைக்கப்பட்ட வெளி என்பது ————

(அ) பிணைப்பிலா

(ஆ) பிணைக்கப்பட்ட வெளி

(இ) அடக்கமான

(ஈ) ஏதுமில்லை

A subspace of a connected space is ————

(a) Disconnected (b) Connected

(c) Compact (d) None

9. வழக்கமான மெட்ரிக்கின் கீழ் $[\theta, \infty]$ என்பது ஒரு

(அ) வரம்புறு கணம் (ஆ) அடக்கமற்றகணம்

(இ) மூடிய கணம் (ஈ) திறந்த கணம்

$[\theta, \infty]$ with usual metric is ————

(a) A bounded set (b) Not a compact set

(c) A closed set (d) An open set

10. $(3,4)$ என்பது ஒரு அடக்கமான கணம் அல்ல, ஏனெனில் அது

(அ) மூடிய கணம் அல்ல

(ஆ) வரம்புறு கணம் அல்ல

(இ) வரம்புப் புள்ளிகள் அற்றது

(ஈ) ஏதுமில்லை

$(3,4)$ is not compact since it is ————

(a) Not a closed set

(b) Not a bounded set

(c) Without limit points

(d) None

PART B — $(5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

Answer should not exceed 250 words.

11. (அ) எல்லா பின்னயண்களையும் கொண்ட கணமாவது எண்ணத்தக்கது என நிறுவுக.

Prove that Q is countable.

Or

(ஆ) R^2 ல் $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

$x = (x_1\, x_2),\ y = (y_1\, y_2)$

என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. R^2 ல் d என்பது ஒரு மெட்ரிக் என நிரூபி.

In R^2 we define $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ where $x = (x_1\, x_2),\ y = (y_1\, y_2)$ prove that d is a metric on R^2

[P.T.O.]

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

12. (அ) பெய்ரின் வகைத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove Baire's category theorem.

Or

(ஆ) E என்பது M என்ற மெட்ரிக் வெளியில் உட்கணம் எனில் $\overline{E}$ முடியது என நிறுவுக.

If E is any subset of a metric space M prove that $\overline{E}$ is closed.

13. (அ) கீழ்க்கண்டவற்றை வரையறு:

(i) ஹோமியோமார்பிஸம்

(ii) திறந்த சார்பு

(iii) மூடிய சார்பு.

Define the following (i) ho meomorphism (ii) Open map (iii) closed map.

Or

(ஆ) $f: R \to R$ ல் $f(x) = \sin x$ என்ற வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு ஒரு சீரான தொடர்ச்சியுடையது என நிறுவுக.

Prove that function $f: R \to R$ defined by $f(x) = \sin x$ is uniformly continuous on R.

14. (அ) A மற்றும் B என்பன ஒரு மெட்ரிக் வெளியின் பிணைக்கப்பட்ட உட்கணங்கள் மற்றும் $A \cap B \neq \phi$ எனில் $A \cup B$ என்பது ஒரு பிணைக்கப்பட்ட கணம் என நிறுவுக.

If A and B are connected subsets of a metric space and If $A \cap B \neq \phi$, then prove that $A \cup B$ is connected.

Or

(ஆ) ஒரு இணைப்புள்ள யாப்புவெளியில் உள்வெளி இணைப்புள்ளதாக இருக்க வேண்டியது இல்லை என நிறுவுக.

Show that a subspace of a connected metric space need not be connected.

15. (அ) ஒரு மெட்ரிக் வெளியின் எந்தவொரு அடக்க உட்கணமும் ஒரு மூடிய கணமாகும் எனக் காட்டுக.

Show that any compact subset of a metric space is a closed set.

Or

(ஆ) A என்பது R ன் மொத்தவரம்புடைய உட்கணம் எனில், $\overline{A}$ கச்சிதமானது என நிறுவுக.

Let A be a totally bounded subset of R prove that $\overline{A}$ is compact.

PART C — ($5 \times 8 = 40$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

Answer should not exceed 600 words.

16. (அ) ஒரு மெட்ரிக் வெளி (M, d) இல் $p(x,y) = 2d(x,y)$ என வரையறுத்தல் d மற்றும் p என்பன சமான மெட்ரிக்குகள் என நிறுவுக.

If we define $p(x,y) = 2d(x,y)$ in a metric space (M, d) then prove that d and p are equivalent metrics.

Or

(ஆ) மெய்யெண்களின் கணம் எண்ணிடத்தக்கதல்ல எனக் காட்டுக.

Prove that the set of real numbers is uncountable.

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

17. (அ) ஒரு திறந்த கணம் ஒரு மெட்ரிக் வெளியில் இருக்க தேவையானதும், போதுமானதும் அதன் நிரப்பு கண முடியதாக இருக்கும் என நிறுவுக.

Prove that a set is open in a metric space iff its complement is closed.

Or

(ஆ) எந்தவொரு யாப்பு வெளியிலும், எந்த ஒரு மூடிய பந்தும் ஒரு மூடிய கணம் என நிறுவுக.

Prove that in any metric space every closed ball is a closed set.

18. (அ) $f:R \to R$ என்பது ஏதேனும் ஒரு சார்பு மற்றும் $r>0$ எனில் $E_r = \left\{a \in R / w(f,a) \geq \frac{1}{r}\right\}$ என்பது மூடிய கணம் என நிறுவுக.

Let $f:R \to R$ be any function. Let $r>0$. prove that $E_r = \left\{a \in R / w(f,a) \geq \frac{1}{r}\right\}$ is closed set.

Or

(ஆ) நிறுவுக: $(M_1,d_1),(M_2,d_2)$ என்பவை யாப்பு வெளிகள் $f:M_1 \to M_2$ என்ற சார்பு தொடர்ச்சியுடையது எனில், மட்டுமே $(x_n) \to x \Rightarrow (f(x_n)) \to f(x)$.

Let $(M_1,d_1),(M_2,d_2)$ be two metric space. Prove that a function $f:M_1 \to M_2$ is continuous iff $(x_n) \to x \Rightarrow (f(x_n)) \to f(x)$.

19. (அ) நிறுவுக: R இன் ஒரு உள்வெளி பிணைக்கப்பட்டது $\Leftrightarrow$ அது ஒரு இடைவெளி.

Prove : A subspace of R is connected $\Leftrightarrow$ it is an interval.

Or

(ஆ) $T:\left[0,\frac{1}{3}\right] \to \left[0,\frac{1}{3}\right]$ என வரையறுக்கப்பட்ட $T(x)=x^2$ என்பது சுருக்கச் சார்பு என நிறுவுக.

Prove that $T:\left[0,\frac{1}{3}\right] \to \left[0,\frac{1}{3}\right]$ defined by $T(x)=x^2$ is a contraction mapping.

20. (அ) ஹெய்ன் போரல் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove Heine Boral theorem.

Or

(ஆ) ஒரு மெட்ரிக் வெளியில் ஒவ்வொரு கச்சிதமான உட்கணமும் முழுமையானது என நிரூபி.

Prove that in a metric space every compact subset is complete.

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam