20. (அ) ஹெய்ன் போரல் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove Heine Borel theorem.

Or

(ஆ) நிறுவுக: ஒரு மெட்ரிக் வெளி M அடக்கமானது $\Leftrightarrow$ முடிவுறு வெட்டுக் குணம் உள்ள எந்தவொரு மூடிய கணங்களின் குடும்பமும் வெற்றற்ற வெட்டு பெறும்.

Prove: A metric space M is compact $\Leftrightarrow$ any family of closed sets with finite intersection property has non–empty interesection.

———————



Reg. No. : ..........................................

**Code No. : 20827** **Sub. Code : GMMA 52/ GMMC 52**

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2014.

Fifth Semester

Mathematics — Main

REAL ANALYSIS

(For those who joined in July 2012 onwards)

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer :

1. வழக்கமான மெட்ரிக்கின் கீழ் $\mathbb{R}$ இல் $[0,1]$ என்பது ஒரு

(அ) திறந்த கணம் (ஆ) வரம்புறு கணம்

(இ) வெற்றுக்கணம் (ஈ) ஏதுமில்லை

In $\mathbb{R}$ with usual metric, $[0,1]$ is

(a) An open set (b) A bounded set

(c) An empty set (d) None

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

2. வழக்கமான மெட்ரிக்கின் கீழ் R இல் $B(1,1)$ என்பது

(அ) $\phi$ (ஆ) $[0,2]$

(இ) $(0,2)$ (ஈ) $[0,2)$

In R with usual metric, $B(1,1)$ is

(a) $\phi$ (b) $[0,2]$

(c) $(0,2)$ (d) $[0,2)$

3. $Z^c = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(n, n+1)$, என்பதால் Z என்பது ஒரு

(அ) மூடிய கணம் (ஆ) திறந்த கணம்

(இ) வெற்றுக்கணம் (ஈ) ஏதுமில்லை

Since $Z^c = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(n, n+1), Z$ is

(a) A closed set (b) An open set

(c) An empty set (d) None

4. $D(Q) =$ ————

(அ) $Q$ (ஆ) $\phi$

(இ) Z (ஈ) $R$



$D(Q) =$ ————

(a) $Q$ (b) $\phi$

(c) Z (d) $R$

5. $f:(M_1,d_1)\to(M_2,d_2)$ என்க. a எனும் புள்ளியில் $f$ தொடர்ச்சியானது $\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) =$ ————

(அ) $f(x)$ (ஆ) $0$

(இ) $1$ (ஈ) $f(a)$

Let $f:(M_1,d_1)\to(M_2,d_2)$. $f$ is continuous at a $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to a} f(x) =$ ————

(a) $f(x)$ (b) $0$

(c) $1$ (d) $f(a)$

6. M என்ற மெட்ரிக் வெளியில் f என்பது ஒரு தொடர் மெய்ச் சார்பு மற்றும் $A=\{x\in M \mid f(x)\geq 0\}$ எனில் A என்பது ஒரு

(அ) திறந்த கணம் (ஆ) மூடிய கணம்

(இ) $\phi$ (ஈ) $A^c$

If f is a continuous real valued function on a metric space M and if $A=\{x\in M \mid f(x)\geq 0\}$, then A is

(a) An open set (b) A closed set

(c) $\phi$ (d) $A^c$



Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

7. வழக்கமான மெட்ரிக்கில் $M = [1,2] \cup [3, 4]$ எனில் $M$ இல் $[1, 2]$ என்பது

(அ) திறந்தது (ஆ) மூடியது

(இ) (அ) மற்றும் (ஆ) (ஈ) $\phi$

If $M = [1,2] \cup [3, 4]$ with usual metric, then in $M$, $[1, 2]$ is

(a) Open (b) Closed

(c) (a) and (b) (d) $\phi$

8. $\mathbb{R}$ என்பது ஒரு

(அ) பிணைப்பிலா கணம்

(ஆ) பிணைக்கப்பட்ட கணம்

(இ) அடக்கமான கணம்

(ஈ) மூடிய கணம்

$\mathbb{R}$ is

(a) A disconnected set (b) A connected set

(c) A compact set (d) A closed set

9. வழக்கமான மெட்ரிக்கின் கீழ் $[0, \infty]$ என்பது ஒரு

(அ) வரம்புறு கணம் (ஆ) அடக்கமற்ற கணம்

(இ) மூடிய கணம் (ஈ) திறந்த கணம்



$[0, \infty]$ with usual metric is

(a) A bounded set (b) Not a compact set

(c) A closed set (d) An open set

10. $(3,4)$ என்பது ஒரு அடக்கமான கணம் அல்ல, ஏனெனில் அது

(அ) மூடிய கணம் அல்ல

(ஆ) வரம்புறு கணம் அல்ல

(இ) வரம்புப் புள்ளிகள் அற்றது

(ஈ) ஏதுமில்லை.

$(3,4)$ is not compact since it is

(a) Not a closed set

(b) Not a bounded set

(c) Without limit points

(d) None.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) எண்ணத்தக்க கணம் என்றால் என்ன? Q ஒரு எண்ணத்தக்க கணம் என நிறுவுக.

What is a countable set? Prove that Q is countable.

Or



Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

(ஆ) $(M,d)$ என்ற மெட்ரிக் வெளியில் ஒவ்வொரு திறந்த பந்தும் ஒரு திறந்த கணம் என நிறுவுக.

Prove that each open ball is an open set in a metric space $(M,d)$ .

12. (அ) ஒரு மெட்ரிக் வெளியில் மூடிய கணங்களின் விதிக்கட்டற்ற வெட்டு ஒரு மூடிய கணம் என நிறுவுக.

Prove that in a metric space, the arbitrary intersection of closed sets is closed.

Or

(ஆ) பெய்ரின் வகைத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove Baire's category theorem.

13. (அ) கீழ்க்கண்டவற்றை வரையறு.

(i) ஹோமியோமார்பிஸம்

(ii) திறந்த சார்பு

(iii) மூடிய சார்பு.

Define the following

(i) Homoeomorphism

(ii) Open map

(iii) Closed map.

Or



(ஆ) ஒரு மெட்ரிக் வெளியில் இரு தொடர்சார்புகளின் கூடுதல் ஒரு தொடர் சார்பு என நிறுவுக.

Prove that the sum of two continuous functions is a continuous function in a metric space.

14. (அ) பிணைக்கப்பட்ட மெட்ரிக் வெளி என்றால் என்ன? உதாரணத்துடன் விளக்குக.

What is a connected metric space? Explain with an example.

Or

(ஆ) A மற்றும் B என்பன ஒரு மெட்ரிக் வெளியின் பிணைக்கப்பட்ட உட்கணங்கள் மற்றும் $A \cap B \neq \phi$ எனில் $A \cup B$ என்பது ஒரு பிணைக்கப்பட்ட கணம் என நிறுவுக.

If A and B are connected subsets of a metric space and if $A \cap B \neq \phi$, then prove that $A \cup B$ is connected.

15. (அ) அடக்க வெளி என்பதனை வரையறு. மேலும் வழக்கமான மெட்ரிக்கில் (0,1) என்பது ஒரு அடக்ககணம் அல்ல என நிறுவுக.

Define the term compact space. Also prove that (0,1) is not compact with usual metric.

Or

(ஆ) ஒரு மெட்ரிக் வெளியின் எந்தவொரு அடக்க உட்கணமும் ஒரு மூடிய கணமாகும் எனக் காட்டுக.

Show that any compact subset of a metric space is a closed set.



Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

## PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) $(M,d)$ என்ற மெட்ரிக் வெளியில்

$d_1(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ எனில் $d_1$ என்பது M இல் மெட்ரிக் எனக் காட்டுக.

If $d_1(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ is a metric space $(M,d)$, then show that $d_1$ is a metric on M.

Or

(ஆ) ஒரு மெட்ரிக் வெளி $(M,d)$ இல் $p(x,y)=2d(x,y)$ என வரையறுத்தால் d மற்றும் p என்பன சமான மெட்ரிக்குகள் என நிறுவுக.

If we define $p(x,y)=2d(x,y)$ in a metric space $(M,d)$, then prove that $d$ and $p$ are equivalent metrics.

17. (அ) M என்ற மெட்ரிக் வெளியில் $A\subseteq M$ எனில் $\overline{A}=A\cup D(A)$ என நிறுவுக.

If $A\subseteq M$ in a metric space M, then prove that $\overline{A}=A\cup D(A)$.

Or



(ஆ) கேண்டாரின் வெட்டுத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove cantor's intersection theorem.

18. (அ) நிறுவுக: f என்பது ஒரு தொடர்பு சார்பு $\Leftrightarrow$ ஒரு திறந்த கணத்தின் எதிர்மறை பிம்பம் ஒரு திறந்த கணம்.

Prove : f is a continuous function $\Leftrightarrow$ inverse image of an open set is a open set.

Or

(ஆ) நிரூபி: $a\in R$ எனும் புள்ளியில் $f:R\to R$ என்பது ஒரு தொடர் சார்பு $\Leftrightarrow \omega(f,a)=0$.

Justify: $f:R\to R$ is a continuous function at $a\in R \Leftrightarrow \omega(f,a)=0$.

19. (அ) நிறுவுக: R இன் ஒரு உள்வெளி பிணைக்கப்பட்டது $\Leftrightarrow$ அது ஒரு இடைவெளி.

Prove: A subspace of R is connected $\Leftrightarrow$ it is an interval.

Or

(ஆ) சுருக்கச் சார்புத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove contraction mapping theorem.



Nesamony Memorial Christian College, Marthandam