20. (அ) $a>b>0$ எனில் $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ என நிறுவுக.

If $a>b>0$ then prove that

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Or

(ஆ) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}$ என நிறுவுக.

Prove that $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}$.

Reg. No. : .....

Code No. : 1107 **Sub. Code : R 3 MA 62/ R 3 MC 62**

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2011.

Sixth Semester

Mathematics

Paper XIII — COMPLEX ANALYSIS

(For those who joined in July 2008 and afterwards)

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer :

1. $2+i, 3+2i, 1$ இவைகளை உச்சிப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தி

(அ) $2+i$ (ஆ) $3+2i$

(இ) $\frac{6+4i}{3}$ (ஈ) 0

The centroid of the triangle whose vertices are $2+i, 3+2i, 1$ is

(a) $2+i$ (b) $3+2i$

(c) $\frac{6+4i}{3}$ (d) 0

2. $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3/4}$ ன் மூலங்களின் எண்ணிக்கை

(அ) 3 (ஆ) 2

(இ) 4 (ஈ) 1

The number of values of $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3/4}$ is

(a) 3 (b) 2

(c) 4 (d) 1

3. $f(z)=\bar{z}$ எனில் u_x+u_y ன் மதிப்பு

(அ) 1 (ஆ) 0

(இ) $x+y$ (ஈ) $x-y$

If $f(z)=\bar{z}$, then u_x+u_y is

(a) 1 (b) 0

(c) $x+y$ (d) $x-y$

4. $f(z)=u_iv$ என்ற பகுமுறைச் சார்பின் மெய், கற்பனைப் பகுதிகள்

(அ) பகுமுறைச் சார்புகள்

(ஆ) நேரிய உருமாற்றம்

(இ) இசைச்சார்புகள்

(ஈ) எதுவுமில்லை

The real and imaginary parts of the analytic function $f(z)=u_iv$ are

(a) Analytic (b) Conformal

(c) Harmonic (d) None

5. C என்பது $|z|=r$ எனும் வட்டம் எனில் $\int_C \frac{dz}{z}$ ன் மதிப்பு

(அ) πi (ஆ) $2\pi i$

(இ) 2π (ஈ) π

If C is the circle $|z|=r$, then the value of $\int_C \frac{dz}{z}$ is

(a) πi (b) $2\pi i$

(c) 2π (d) π

6. மொரைராவின் தேற்றத்தின் கட்டுப்பாடு

(அ) $\int_C f(z)\,dz = 0$

(ஆ) $f(z)$ = மாறிலி

(இ) $\int_C \frac{f(z)}{z}\,dz = 0$

(ஈ) $f(z)$ = ஒரு பகுமுறைச் சார்பு

The condition for Morera's theorem

(a) $\int_C f(z)\,dz = 0$

(b) $f(z)$ = constant

(c) $\int_C \frac{f(z)}{z}\,dz = 0$

(d) $f(z)$ = is analytic

7. $f(z) = \cos ec\,\frac{1}{z}$ என்ற சார்பின் துருவங்கள்

(அ) $\frac{n\pi}{2}$ (ஆ) $\frac{2}{n\pi}$

(இ) $\frac{1}{n\pi}$ (ஈ) $\frac{1}{2n\pi}$

The poles of the function $f(z) = \cos ec\,\frac{1}{z}$ are

(a) $\frac{n\pi}{2}$ (b) $\frac{2}{n\pi}$

(c) $\frac{1}{n\pi}$ (d) $\frac{1}{2n\pi}$

8. ஒரு தனித்த வழுப்புள்ளி, $f(z)$ என்ற சார்பிற்கு துருவமாக இருப்பதற்கு $\lim_{z\to a} f(z)$ -ன் மதிப்பு

(அ) ∞ (ஆ) 0

(இ) 1 (ஈ) -1

Condition for isolated singularity of $f(z)$ to be a pole, $\lim_{z\to a} f(z)$ is

(a) ∞ (b) 0

(c) 1 (d) -1

9. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ ன் மதிப்பு

(அ) 0 (ஆ) $\frac{\pi}{2}$

(இ) $\frac{\pi}{4}$ (ஈ) $\frac{\pi}{6}$

$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ is

(a) 0 (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

10. $z=0$ என்ற புள்ளியில் $\frac{e^{iz}}{z}$ என்ற சார்பிற்கு எச்சம்

(அ) 0 (ஆ) $\frac{1}{2}$

(இ) ∞ (ஈ) 1

The residue of $\frac{e^{iz}}{z}$ at $z=0$ is

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$

(c) ∞ (d) 1

PART B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) z_1, z_2 என்பன கலப்பெண்கள். $|z_1| = 1$ அல்லது $|z_2| = 1$ எனில் $\left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right| = 1$ என நிறுவுக.

If z_1 and z_2 are two complex numbers, prove that $\left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right| = 1$ if either $|z_1| = 1$ or $|z_2| = 1$

Or

(ஆ) கலப்பெண்களின் துருவ வடிவத்தைப் பயன்படுத்தி $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arz(z_2)$ என நிறுவுக.

Using Polar form of complex numbers, prove that $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arz(z_2)$.

12. (அ) $2, i, -2$ என்ற புள்ளிகளை முறையே $1, i, -1$ என்ற புள்ளிகளோடு சேர்க்கும் இருபுற நேரிய உருமாற்றத்தைக் காண்க.

Find the bilinear transformation which maps $2, i, -2$ to $1, i, -1$ respectively.

Or

(ஆ) ஒரு பகுமுறைச் சார்பின் மெய்ப்பகுதி மாறிலியாக இருக்கும் எனில் அந்த பகுமுறைச் சார்பு ஒரு மாறிலி என நிறுவுக.

Prove that an analytic function whose real part is constant is itself a constant.

13. (அ) $|z| = 2$ என்ற வட்டத்தின் நேர்திசையில் $\int_C \frac{z\,dz}{z^2 - 1}$ ன் மதிப்பு காண்க.

Evaluate $\int_C \frac{z\,dz}{z^2 - 1}$ where C is the positively oriented circle $|z| = 2$.

Or

(ஆ) காஷியின் சமனின்மைத் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and prove Cauchy's inequality.

14. (அ) வெயர்ஸ்ட்ராஸ்-ன் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and prove Weistrass theorem.

Or

(ஆ) $1<|z|<2$ எனும் பகுதியில் $\frac{-1}{(z-1)(z-2)}$ன் தொடரை எழுதுக.

Expand $\frac{-1}{(z-1)(z-2)}$ as a power series in $1<|z|<2$.

15. (அ) மதிப்பிடுக : $\int_{|z|=2} \tan z\, dz$.

Evaluate : $\int_{|z|=2} \tan z\, dz$.

Or

(ஆ) மதிப்பிடுக : $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{13+5\sin\theta}$.

Evaluate $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{13+5\sin\theta}$.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) (i) மெய்யெண்களைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் மெய்யில்லாத மூலங்கள் இணையாகவே இருக்கும் என நிறுவுக.

(ii) நிறுவுக :

$$|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right).$$

(i) Prove that the non-real roots of a polynomial equation with real coefficients occur in conjugate pair.

(ii) Prove that

$$|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right).$$

Or

(ஆ) $u=e^x(x\cos y-y\sin y)$ எனில் $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ என்ற பகுமுறைச் சார்பைக் காண்க.

Find an analytic function $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ such that $u=e^x(x\cos y-y\sin y)$.

17. (அ) C-R சமன்பாடுகளை துருவ ஆயத்தொலை வடிவில் வருவி.

Derive C-R equations in polar form.

Or

(ஆ) $f(z)=u+iv$ என்பது ஒரு பகுமுறைச் சார்பு மற்றும் $u(x,y)=\dfrac{\sin 2x}{\cosh 2y+\cos 2x}$ எனில், $f(z)$ காண்க.

If $f(z)=u+iv$ is an analytic function and $u(x,y)=\dfrac{\sin 2x}{\cosh 2y+\cos 2x}$, find $f(z)$.

18. (அ) (i) அறமவியலின் அடிப்படைத் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

(ii) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z^3}{(2z+i)^3}dz$ ன் மதிப்பு காண்க.

(i) State and prove fundamental theorem of algebra.

(ii) Find $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z^3}{(2z+i)^3}dz$.

Or

(ஆ) காஷியின் தொகையீட்டு சூத்திரத்தை எழுதி நிறுவுக மற்றும் C எனும் வட்டம் $|z|=4$ எனில் $\displaystyle\int_C\frac{z^2+5}{z-3}dz$ ஐ மதிப்பிடுக.

State and prove Cauchy's integral formula and hence evaluate $\displaystyle\int_C\frac{z^2+5}{z-3}dz$ where C is $|z|=4$.

19. (அ) லாரன்ஸ் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and prove Laurent's theorem.

Or

(ஆ) $f(z)=\dfrac{2z^3+1}{z(z+1)}$ என்ற சார்பை

(i) $z=i$ ஐச் சுற்றி டெய்லர் தொடராக எழுது

(ii) ஆதியை மையமாக் கொண்ட இரு வட்டங்களுக்கு இடையேயான பகுதியில் லாரன்ஸ் விரிவு காண்க.

For the function $f(z)=\dfrac{2z^3+1}{z(z+1)}$ find

(i) a Taylor's series valid in a neighborhood of $z=i$

(ii) a Laurent's series valid with in an annulus of which centre is the origin.