Reg. No. : ....

Code No. : 20825 **Sub. Code : GMMA 41/ GMMC 41**

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2015.

Fourth Semester

Mathematics — Main

ABSTRACT ALGEBRA

(For those who joined in July 2012 and afterwards)

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL the questions.

Choose the correct answer :

1. Z ல் $a \rho b \Leftrightarrow ab$ என வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்பு ρ என்பது

   (அ) பிரதிபலிப்பு மற்றும் சமச்சீர்

   (ஆ) பிரதிபலிப்பு மற்றும் சமச்சீரல்ல

   (இ) சமச்சீர் மற்றும் பிரதிபலிப்பற்றது

   (ஈ) பிரதிபலிப்பும் அல்ல சமச்சீரும் அல்ல.

The relation ρ defined on Z by $a \rho b \Leftrightarrow ab$ is odd is ______.

(a) reflexive and symmetric

(b) reflexive but not symmetric

(c) symmetric but not reflexive

(d) neither reflexive nor symmetric.

2. $f(x) = \frac{x}{x-1} (x \neq 1)$ எனில் $f^{-1}(x) =$ ______.

(அ) $\frac{y}{y+1}$ (ஆ) $\frac{y}{y-1}$

(இ) $\frac{y-1}{y}$ (ஈ) $\frac{y+1}{y}$.

If $f(x) = \frac{x}{x-1} (x \neq 1)$ then $f^{-1}(x) =$ ______.

(a) $\frac{y}{y+1}$ (b) $\frac{y}{y-1}$

(c) $\frac{y-1}{y}$ (d) $\frac{y+1}{y}$.

3. G ல் எந்த இரு உறுப்புகளுக்கும் $(ab)^2 = a^2b^2$ என்பது உண்மை எனில் ______.

(அ) G என்பது அபீலியன்

(ஆ) G என்பது அபீலியன்அல்ல

(இ) G என்பது ஒரு குலம்

(ஈ) G என்பது முடிவுறு.

For any two elements $a, b \in G$ the statement $(ab)^2 = a^2b^2$ is true if ______.

(a) G is abelian (b) G is non abelian

(c) G is any group (d) G is finite.

4. $(Z_8, \oplus)$ ல் 3-ன் வரிசை ______.

(அ) 2 (ஆ) 4

(இ) 6 (ஈ) 8.

The order of the element 3 in $(Z_8, \oplus)$ is ______.

(a) 2 (b) 4

(c) 6 (d) 8.

5. $(Z_{12}, \oplus)$ ல் பிறப்பாக்கிகளின் எண்ணிக்கை

(அ) 4 (ஆ) 3

(இ) 2 (ஈ) எதுவும் இல்லை.

For group $(Z_{12}, \oplus)$, the number of generators is ______.

(a) 4 (b) 3

(c) 2 (d) none.

6. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ என்பது வரிசை மாற்றம் எனில் α^{-1} என்பது ————.

(அ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ (ஆ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(இ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (ஈ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

If $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ is a permutation then α^{-1} is ————.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

7. பின்வருவனவற்றில் எது வளையம் அல்லாதது

(அ) $(Z, +, \cdot)$ (ஆ) $(Q, +, \cdot)$

(இ) $(Z_n, \otimes, \oplus)$ (ஈ) $(Z_n, \oplus, \otimes)$.

The algebraic structure which is not a ring is ————.

(a) $(Z, +, \cdot)$ (b) $(Q, +, \cdot)$

(c) $(Z_n, \otimes, \oplus)$ (d) $(Z_n, \oplus, \otimes)$.

8. எந்தவொரு வரிசைப்படுத்தப்பட்ட எண் அரங்கத்தின் சிறப்பியல்பு

(அ) 1 (ஆ) 0

(இ) முடிவிலா எண் (ஈ) பகா எண்.

Any ordered integral domain is of characteristic

(a) 1 (b) 0

(c) infinite (d) prime.

9. $f : Z \to Z$ ல் $f(x) = 2x$ என்ற சார்பு

(அ) செயல் மாறா கோர்த்தல் வளையம்

(ஆ) சர்வசமக் கோர்த்தல் வளையம்

(இ) தனித்த கோர்த்தல் வளையம்

(ஈ) செயல்மறா கோர்த்தல் குலம்.

The map $f : Z \to Z$ defined $f(x) = 2x$ is ————.

(a) ring homomorphism

(b) ring isomorphism

(c) ring automorphism

(d) group homorphism.

10. $f : C \to C$ என்ற சார்புக்கு $f(z) = \bar{z}$ எனில் f ன் உட்கரு என்பது ————.

(அ) Φ (ஆ) $\{0\}$

(இ) $\{1\}$ (ஈ) $\{i\}$.

Let $f : C \to C$ be defined by $f(z) = \bar{z}$. Then ker f is ————————.

(a) Φ (b) $\{0\}$

(c) $\{1\}$ (d) $\{i\}$.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) $f : R - \{3\} \to R - \{1\}$ ல் என்ற சார்பு

$$f(x) = \frac{x-2}{x-3}$$

என்று வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது எனில் f ஒரு ஒன்றுக்கொன்று மேல் சார்பு என நிரூபி, அதன் நேர்மாறு காண்க.

Show that $f : R - \{3\} \to R - \{1\}$ given by $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$ is a bijection and find its inverse.

Or

(ஆ) S என்ற கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்ட ρ மற்றும் σ எனும் சமமான உறவுகள் எனில் $\rho \cap \sigma$ என்பதும் சமமான உறவு என நிரூபி.

If ρ and σ are equivalence relations defined on a set S, prove that $\rho \cap \sigma$ is an equivalence relation.

12. (அ) எந்தவொரு வரிசை மாற்றத்தையும் சுற்றுக்களின் பெருக்கலால் எழுத முடியும் என நிரூபி.

Prove that, any permutation can be expressed as a product of disjoint cycles.

Or

(ஆ) ஒரு சக்கர குலத்தின் உட்குலம் ஒரு சக்கர குலமாகும் என நிறுவுக.

Prove that a subgroup of a cyclic group is cyclic.

13. (அ) ஒரு குலம் G ல் இரு நேர்மை உட்குலங்களின் வெட்டு ஆனது, G ல் ஒரு நேர்மை உட்குலம் என நிரூபி.

Prove that the intersection of two normal subgroup of a group G is a normal subgroup of G.

Or

(ஆ) G என்பது ஒரு குலம், H என்பது G யின் மையம் எனில் $G / H \cong I(G)$ என நிறுவுக.

Let G be any group and H be the centre of G. Prove that $G / H \cong I(G)$, the group of inner automorphisms of G.

14. (அ) R என்ற ஒரு வளையத்திற்கு பூஜ்ய வகுப்பான்கள் இல்லாமல் இருக்க நீக்கல் விதி இருக்க வேண்டும் என்பது தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை எனக்காட்டு.

Prove that a ring R has no zero-division iff cancellation law is valid in R.

Or

(ஆ) n என்பது பகா எண்ணாக இருந்தால் மாட்டுமே Z_n என்பது ஒரு களம் என நிறுவுக.

Prove that Z_n is a field iff n is prime.

15. (அ) Z-ல், n ஒரு பகா எண் எனில், (n) என்பது ஒரு உட்ச ஐடியல் என நிறுவுக.

Prove that in Z, if n is prime, then (n) is maximal ideal.

Or

(ஆ) R மற்றும் R' வளையம் என்க. $f:R\to R'$ என்பது செயல்மாறா சார்பு என்க. $\ker f=\{0\}\Leftrightarrow f$ என்பது $1-1$ என நிறுவுக.

$f:R\to R'$ is a ring homomorphism. Prove that $\ker f=\{0\}\Leftrightarrow f$ is $1-1$.

PART C — ($5 \times 8 = 40$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) $f : A \to B$ என்பது ஒன்றுக்கொன்று முழுசார்பு $\Leftrightarrow$ ஏதோ ஒரு ஒருமை தன்மை வாய்ந்த சார்பு ஆனது $g \circ f = i_A$ மற்றும் $f \circ g = i_B$ அமையும் என நிரூபி.

Prove that a function $f : A \to B$ is a bijection iff there exists a unique $g : B \to A$ such that $g \circ f = i_A$ and $f \circ g = i_B$.

Or

(ஆ) $f : A \to B$, $g : B \to C$ என்பது இரு சார்புகள் என்க. $g \circ f$ என்பது ஒன்றுக்கொன்று சார்பு எனில், f ம் ஒன்றுக்கொன்று சார்பு என நிரூபி. $g \circ f$ என்பது மேல்சார்பு எனில், g ம் மேல் சார்பு ஆகும். என நிரூபி.

Let $f : A \to B$, $g : B \to C$ be two functions. Prove that

(i) $g \circ f$ is $1-1 \Rightarrow f$ is 1–1

(ii) $g \circ f$ is onto $\Rightarrow g$ is onto.

17. (அ) ஆய்லரின் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and prove Euler's theorem.

Or

(ஆ) லெக்ராஞ்சியின் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

State and prove Lagrange's theorem.

18. (அ) G ல் N என்பது நேர்மை உட்குலம் எனில் G/N என்பது $NaNb = Nab$ என்ற சார்புக்கு ஓர் குலம் என காட்டுக.

Let N be a normal subgroup of a group G. Prove that G/N is a group under the operation defined by $NaNb = Nab$.

Or

(ஆ) குலங்களுக்கான செயலொப்புமைக்கான அடிப்படை தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

State and prove Fundamental theorem of group Homomorphism.

19. (அ) $f : Q \to Q$ என்ற ஒரே ஒரு சமகோர்த்தல் மட்டுமே சமனி சார்பு என நிறுவுக.

Prove that the only isomorphism $f : Q \to Q$ is the identify map.

Or

(ஆ) (i) களம் F ன் இடியல்கள் $\{0\}$ மற்றும் F என நிறுவுக.

(ii) ஒரு இடது இடியல் என்பது இடியல் ஆகாது என்பதற்கு ஓர் உதாரணம் தருக.

(i) Prove that the only ideals of a filed F are $\{0\}$ and F

(ii) Give an example for a left ideal but not an ideal.

20. (அ) R என்பது பரிமாற்று வளையம், P என்பது R ன் இடியல் எனில் P என்பது பகா இடியல் $\Leftrightarrow F/P$ என்பது எண் அரங்கம்.

Let R be any commutative ring with identity. Let P be an ideal of R. Prove that P is prime ideal $\Leftrightarrow F/P$ is an integral domain.

Or

(ஆ) R என்பது சமனி உடைய பரிமாற்று வளையம். R ன் இடியல் M அதிகபட்சம் $\Leftrightarrow$ R/M ஒரு களம் என நிறுவுக.

Let R be a commutative ring with identity. Prove that ideal M of R is maximal iff R/M is a field.