

Verify Green's theorem for $\int_C (3x^2 - 8y^2)dx + (4y - 6xy)dy$ where C is the boundary of the region R enclosed by $y = x^2$ and $y^2 = x$

Or

(ஆ) S என்பது xy தளத்திற்கு மேலே உள்ள $x = 0, x = 2, y = 0, y = 2, z = 0, z = 2$ என்ற கனசதுரத்தின் புறப்பரப்பாயின், $A = (y - z + 2)i + (yz + 4)j - xzk$ -க்கு ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்தை சரிபார்.

Verify stoke's theorem for $A = (y - z + 2)i + (yz + 4)j - xzk$ where S is the surface of the cube $x = 0, x = 2, y = 0, y = 2, z = 0, z = 2$ above the xy plane.

Reg. No. :

Code No. : 21135

Sub. Code : JSMA 3 A/
JSMC 3 A

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION,
NOVEMBER 2017.

Third Semester

Mathematics/Maths with CA – Main

VECTOR CALCULUS

(For those who joined in July 2016 only)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer:

1. $f(u + \Delta u) = f(u) + \Delta f$ எனில் $\frac{df}{du} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(அ) $\frac{\Delta f}{\Delta u}$

(ஆ) $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u}$

(இ) Δf

(ஈ) f



If $f(u + \Delta u) = f(u) + \Delta f$, then $\frac{df}{du} = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (a) $\frac{\Delta f}{\Delta u}$ (b) $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u}$
 (c) Δf (d) f

2. ஒரு வெக்டர் சார்பு அரங்கில் வரையறுக்கப்பட்டது எனில் என அழைக்கப்படும்.

- (அ) வெக்டர் சார்பு (ஆ) வெக்டர் கணம்
 (இ) வெக்டர் களம் (ஈ) வெக்டர் பரப்பு

A vector function defined on a domain is said to be .

- (a) Vector plane (b) Vector set
 (c) Vector field (d) Vector region

3. $\nabla \times v = 0$ எனில் வெக்டர் V என அழைக்கப்படும்.

- (அ) பாய்வற்றது (ஆ) சுழற்சியற்றது
 (இ) பரிமாணம் (ஈ) சாய்வு

If $\nabla \times v = 0$, then the vector V is said to be .

- (a) Solenoidal (b) Irrotational
 (c) Magnitude (d) Gradient

4. லாப்லாஸின் வகைப்பாடு செயலியின் இரண்டாம் படி சமன்பாடு .

- (அ) $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2$ (ஆ) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
 (இ) $i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y}$ (ஈ) $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$

The second degree Laplacian differential equation is .

- (a) $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2$ (b) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
 (c) $i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y}$ (d) $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$

5. ரீமானின் தொகையிடலுக்கான தேற்றத்திலிருந்து

$$\frac{d}{du} \int_{u_1}^u f(u) du = \underline{\hspace{2cm}}.$$

- (அ) $\Delta f(u)$ (ஆ) $f(u)$
 (இ) $f(u) - f(u_1)$ (ஈ) $\Delta f(u) - \Delta f(u_1)$

From Riemann theory of integration $\frac{d}{du} \int_{u_1}^u f(u) du =$

- (a) $\Delta f(u)$ (b) $f(u)$
 (c) $f(u) - f(u_1)$ (d) $\Delta f(u) - \Delta f(u_1)$



6. S -ல் அமைந்துள்ள ϕ -ன் புறப்பரப்பு தொகையிடல் _____ எனப்படும்.

(அ) $\int_c \phi ds$ (ஆ) $\int_s \phi ds$

(இ) $\iint_s \phi ds$ (ஈ) $\iint_c \phi dr$

The surface integral of ϕ on S is denoted by _____.

(a) $\int_c \phi ds$ (b) $\int_s \phi ds$

(c) $\iint_s \phi ds$ (d) $\iint_c \phi dr$

7. A என்ற கன அளவு தொகையிடல் _____ என குறிக்கப்படும்.

(அ) $\int_c A dr$ (ஆ) $\iint_s A ds$

(இ) $\iiint_v A dv$ (ஈ) $\iint_v A dv$

The volume integral of A is denoted by _____.

(a) $\int_c A dr$ (b) $\iint_s A ds$

(c) $\iiint_v A dv$ (d) $\iint_v A dv$

8. விரிதல் தேற்றத்திலிருந்து, $\iint_s \phi ds =$ _____.

(அ) $\int_c \Delta \phi dr$ (ஆ) $\iiint_v \Delta \phi dv$

(இ) $-\iiint_v \nabla \phi dv$ (ஈ) $\iiint_v \nabla \phi dv$

From the divergence theorem, $\iint_s \phi ds =$ _____.

(a) $\int_c \Delta \phi dr$ (b) $\iiint_v \Delta \phi dv$

(c) $-\iiint_v \nabla \phi dv$ (d) $\iiint_v \nabla \phi dv$

9. கிரீன் முதலாம் தனித்துவ விதியானது _____.

(அ) $\oint_c Mdx + Ndy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$

(ஆ) $\oint_c A dr = \iint_s (\nabla \times A) \cdot ds$

(இ) $\iint_s (\phi \nabla \psi) ds = \iiint_v (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dv$

(ஈ) $\iint_s (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) ds = \iiint_v (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dv$



Green's first identity is —————.

(a) $\iint_S (\phi \nabla \psi) ds = \iiint_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dv$

(b) $\oint_C A dr = \iint_S (\nabla \times A) \cdot ds$

(c) $\iint_S (\phi \nabla \psi) ds = \iiint_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dv$

(d) $\iint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) ds = \iiint_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dv$

10. ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்திலிருந்து, $\oint_C \phi dr =$ —————.

(அ) $\iint_R \Delta \phi dr$ (ஆ) $\iint_R \nabla \phi dr$

(இ) $-\iint_S (\Delta \phi) \times ds$ (ஈ) $-\iint_S (\nabla \phi) \times ds$

From stoke's theorem, $\oint_C \phi dr =$ —————.

(a) $\iint_R \Delta \phi dr$ (b) $\iint_R \nabla \phi dr$

(c) $-\iint_S (\Delta \phi) \times ds$ (d) $-\iint_S (\nabla \phi) \times ds$

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

Each answer should not exceed 250 words.

11. (அ) (i) u ன் சார்பு ϕ மற்றும் $\vec{a}$ ஒரு மாநிலி வெக்டர் எனில் $\frac{d(\phi \vec{a})}{du} = \vec{a} \frac{d\phi}{du}$ என காட்டுக மேலும்,

(ii) a -ம் u -ஐ கொண்ட ஒரு சார்பு எனில், $\frac{d(\phi a)}{du} = a \frac{d\phi}{du} + \phi \frac{da}{du}$ எனக் காட்டு.

Show that,

(i) If ϕ is a scalar function of u and $\vec{a}$, a is constant vector then $\frac{d(\phi \vec{a})}{du} = \vec{a} \frac{d\phi}{du}$.

(ii) If a also is a function of u , $\frac{d(\phi a)}{du} = a \frac{d\phi}{du} + \phi \frac{da}{du}$

Or

(ஆ) ϕ -ன் திசை வகைபாடானது அலகு வெக்டர் e -ஐ பொறுத்து அதன் திசை $(\nabla \phi) \cdot e$ ஆக அமையும் எனக் காட்டுக.

Show that, the directional derivative of ϕ in the direction specified by the unit vector e is $(\nabla \phi) \cdot e$



12. (அ) வெக்டர் $A = x^2z^2i + xyz^2j - xz^3k$ ஒரு பாய்வற்ற வெக்டர் என காட்டு.

Show that the vector $A = x^2z^2i + xyz^2j - xz^3k$ is solenoidal.

Or

- (ஆ) $\nabla \cdot (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) = \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi$ எனக் காட்டுக.

Show that $\nabla \cdot (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) = \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi$.

13. (அ) C ஏதாவதொரு மூடிய வளைவு எனில், f என்ற நடுத்தர களம் $\int_C f \cdot dr = 0$ என நிரூபி.

Prove that, In a conservative field f , $\int_C f \cdot dr = 0$, where C is any closed curve.

Or

- (ஆ) S என்பது $2x + 3y + 6z = 12$ -ன் முதல் அரைக்கால் பகுதி புறப்பரப்பாயின் $A = 18zi - 12j + 3yk$ எனும் போது $\iint_S A \cdot nds$ -ஐ மதிப்பிடுக.

Evaluate $\iint_S A \cdot nds$ if $A = 18zi - 12j + 3yk$ and S is the surface $2x + 3y + 6z = 12$ in the first octant.

Page 8 Code No. : 21135

14. (அ) V என்பது $0 \leq x, y, z \leq 1$ என்ற கனசதுரத்தால் சூழப்பட்ட கனஅளவு பகுதி மேலும் $F = x^2i + y^2j + z^2k$ எனில் $\iiint_V \nabla \cdot F \, dv$ -ஐ மதிப்பிடுக.

Evaluate $\iiint_V \nabla \cdot F \, dv$. If $F = x^2i + y^2j + z^2k$ and if V is the volume of the region enclosed by the cube $0 \leq x, y, z \leq 1$.

Or

- (ஆ) S என்பது $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ என்ற கோளத்தின் புறப்பரப்பாயின் $\iint_S r \cdot n \, ds = 4\pi a^3$ என காட்டுக.

Show that $\iint_S r \cdot n \, ds = 4\pi a^3$ if S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

15. (அ) C என்ற வட்டம் $x^2 + y^2 = 1$ எனில் $\int_C (x - 2y)dx + x \, dy$ என்ற தொகையிடலுக்கு கிரீன் தேற்றத்தை சரிபார்.

Verify Green's theorem for $\int_C (x - 2y)dx + x \, dy$, where C is the circle $x^2 + y^2 = 1$.

Or

Page 9 Code No. : 21135



(ஆ) S என்பது $x^2 + y^2 = 1 - z$, $z \geq 0$ எனும் பரவளைய புறப்பரப்பு மேலும் $A = yi + zj + xk$ எனில் $\iint_S (\nabla \times A) \cdot ds$ -ஐ மதிப்பிடுக.

Evaluate $\iint_S (\nabla \times A) \cdot ds$, if $A = yi + zj + xk$, where S is the paraboloidal surface $x^2 + y^2 = 1 - z$, $z \geq 0$.

SECTION C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) $A = u^2i + uj + 2uk$ மற்றும் $B = j - uk$ எனில் $A \cdot B$ மற்றும் $A \times B$ -யின் u -ஐ பொறுத்து அதன் வகைபாடுகளை காண்க.

Find the derivatives of $A \cdot B$ and $A \times B$ with respect to u . If $A = u^2i + uj + 2uk$ and $B = j - uk$.

Or

(ஆ) ϕ மற்றும் ψ என்பன ஸ்கேலார் புள்ளி சார்புகள் எனில்,

(i) $\nabla(k\phi) = k(\nabla\phi)$, k -ஒரு மாறிலி

(ii) $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$,

(iii) $\nabla(\phi\psi) = (\nabla\phi)\psi + \phi(\nabla\psi)$

(iv) $\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi}{\psi^2}$ எனக் காட்டுக.

Page 10 Code No. : 21135

If ϕ and ψ are scalar point functions, then show that

(i) $\nabla(k\phi) = k(\nabla\phi)$, where k is a constant

(ii) $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$,

(iii) $\nabla(\phi\psi) = (\nabla\phi)\psi + \phi(\nabla\psi)$

(iv) $\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi}{\psi^2}$

17. (அ) A மற்றும் B வெக்டர் புள்ளி சார்புகள், ϕ ஒரு ஸ்கேலார் புள்ளி சார்பு மற்றும் k ஒரு மாறிலி எனில்

(i) $\nabla \cdot (A + B) = \nabla \cdot A + \nabla \cdot B$,

(ii) $\nabla \cdot (kA) = k(\nabla \cdot A)$,

(iii) $\nabla \cdot (\phi A) = (\nabla \phi) \cdot A + \phi(\nabla \cdot A)$ என நிறுவுக.

If A and B are vector point functions, ϕ a scalar point function and k a constant then prove that

(i) $\nabla \cdot (A + B) = \nabla \cdot A + \nabla \cdot B$,

(ii) $\nabla \cdot (kA) = k(\nabla \cdot A)$,

(iii) $\nabla \cdot (\phi A) = (\nabla \phi) \cdot A + \phi(\nabla \cdot A)$

Or

Page 11 Code No. : 21135



(ஆ) (i) $(V \cdot \nabla)r = V$

(ii) $(V \times \nabla) \times r = -2V$ என காட்டுக.

Show that,

(i) $(V \cdot \nabla)r = V$

(ii) $(V \times \nabla) \times r = -2V$

18. (அ) வெக்டர் களம் f , ஒரு நடுத்தர களம் ஆக இருக்க தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனையை $\nabla \times f = 0$ என காட்டுக.

Show that the necessary and sufficient condition for a vector field f to be conservative is that $\nabla \times f = 0$.

Or

- (ஆ) S என்பது xy தளத்திற்கு மேலே உள்ள $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ என்ற கோளத்தின் புறப்பரப்பாயின் மேலும் $A = xi + yj - 2zk$ எனில் $\iint_S A \cdot nds$, -ஐ மதிப்பிடுக.

Evaluate $\iint_S A \cdot nds$, if $A = xi + yj - 2zk$ and

S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ above the xy plane.

19. (அ) $z = 0$ மற்றும் $z = c$ என்ற தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற உருளையால் சூழப்பட்ட பகுதியின் கனஅளவு V என்க மேலும் $F = 2xzi - xj + y^2k$ எனில் $\iiint_V F \cdot dv$ -ஐ

மதிப்பிடுக.

Evaluate $\iiint_V F \cdot dv$, where $F = 2xzi - xj + y^2k$

and V is the volume of the region enclosed by the cylinder $x^2 + y^2 = a^2$ between the planes $z = 0$ and $z = c$.

Or

- (ஆ) $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ என வரையறுக்கப்பட்ட இணைகர திண்மத்தை கொண்ட $A = (x^2 - yz)i + (y^2 - zx)j + (z^2 - xy)k$ என்ற வெக்டருக்கு விரிதல் தேற்றத்தை சரிபார்.

Verify divergence theorem for the vector $A = (x^2 - yz)i + (y^2 - zx)j + (z^2 - xy)k$ taken over the parallelepiped defined by $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$.

20. (அ) $y = x^2$ மற்றும் $y^2 = x$ -ஆல் சூழப்பட்ட பகுதி R -ன் எல்லை C எனில் $\int_C (3x^2 - 8y^2)dx + (4y - 6xy)dy$ -க்கு கிரீனின் தேற்றத்தை சரிபார்.

