

(ஆ) (i) ஒவ்வொரு இணைக்கப்பட்ட கணத்தின் தொடர்ச்சி இணைக்கப்பட்டது என நிரூபி.

(ii) இடை மதிப்பு தோற்றத்தை எழுதி நிறவுக.

(i) Prove that the continuous image of a connected space is connected.

(ii) State and prove intermediate value theorem.

20. (அ) வழக்கமான மெட்ரிகில் C முழுமையானது என நிரூபி.

Prove that C with usual metric is complete.

Or

(ஆ) பேரின் பண்பு குழு தோற்றத்தை எழுதி நிரூபி

State and prove Baire's category theorem.

Reg. No. :

Code No. : 10103

Sub. Code : R 3 MA 51/

R 3 MC 51/

B 3 MA 51/

B 3 MC 51

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION,
NOVEMBER 2012.

Fifth Semester

Mathematics — Main

Paper VII — REAL ANALYSIS

(Also common to Maths with computer application)

(For those who joined in July 2008 and afterwards)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer:

1. எது சரியல்ல? Q என்பது

(அ) முழுமையானது

(ஆ) இணைக்கக் கூடியது

(இ) எண்ணிடத்தக்கது

(ஈ) பிரிக்கக் கூடியது

Which is correct?

- (a) Q is complete (b) Q is connected
(c) Q is countable (d) Q is separable

2. கீழ் வருபவனற்றுள் எது சரியல்ல?

- (அ) எண்ணிடத்தக்க கணங்களின் இணைப்பு எண்ணிடத்தக்கது
(ஆ) எண்ணிடத்தக்க கணங்களின் வெட்டு இணைப்பு எண்ணிடத்தக்கது
(இ) எண்ணிடத்தக்க கணங்களின் எண்ணிடத்தக்க இணைப்பு எண்ணிடத்தக்கது
(ஈ) எண்ணிடத்தக்க கணங்களின் பெருக்கல் எண்ணிடத்தக்கது

Which of the following is correct?

- (a) Union of countable set is countable
(b) Intersection of countable set is countable
(c) Countable union of countable sets is countable
(d) Product of countable sets is countable

3. Z -ன் மூடுதல்

- (அ) Z (ஆ) ϕ
(இ) R (ஈ) எதுவுமில்லை

The closure of Z is

- (a) Z (b) ϕ
(c) TR (d) none

4. கீழ்வருபவனற்றுள் எது சரியல்ல?

- (அ) Z -மூடியது
(ஆ) ஒர் உறுப்பு கணங்கள் மூடியவை
(இ) Q -மூடியது
(ஈ) எந்த ஒரு முடிவு கணமும் முடியது

Which of the following is not true

- (a) Z is closed
(b) every singleton set is closed
(c) Q is closed
(d) any finite set is closed

5. ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு எனில் $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ என்பது

- (அ) a (ஆ) x
(இ) $f(a)$ (ஈ) $f(x)$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ is

- (a) a (b) x
(c) $f(a)$ (d) $f(x)$

6. கீழ்வருபவனற்றுள் எது உண்மை?

- (அ) ஒவ்வொரு முழுகோர்த்தல் சார்பும் ஒரு சம அளவுடைய சார்பு ஆகும்
(ஆ) ஒவ்வொரு சம அளவுடைய சார்பும் முழுகோர்த்தல் சார்பு ஆகும்
(இ) ஒவ்வொரு தொடர்ச்சியான சார்பும், கீரான தொடர்ச்சியான சார்பு ஆகும்
(ஈ) ஒரு தொடர்ச்சியான 1—1 மேலானது எனில் f^{-1} தொடர்ச்சியானது

Which of the following is true?

- (a) Every homeomorphism is an isometry
(b) Every isometry is a homomorphism
(c) Every continuous function is uniformly continuous
(d) If f is a continuous bijection then f^{-1} is continuous.

7. $\mathbb{R}$ -ன் இணைப்பு உட்கணம்

- (அ) $[0,1]$ (ஆ) $\mathbb{Q}$
(இ) முடிவு கணம் (ஈ) $\{0\}$

A connected subset of $\mathbb{R}$ is

- (a) $[0,1]$ (b) $\mathbb{Q}$
(c) Finite set (d) $\{0\}$

8. $\mathbb{Q}$ என்பது

- (அ) திறந்தகணம்
(ஆ) முடியகணம்
(இ) இணைப்பு கணமல்ல
(ஈ) முழுமையானது

$\mathbb{Q}$ is

- (a) open (b) closed
(c) not-connected (d) complete

9. எது கச்சிதமானது?

- (அ) $\mathbb{Q}$ (ஆ) $[0,\infty)$
(இ) $[0,1]$ (ஈ) $\mathbb{R}$

Which one of the following is compact?

- (a) $\mathbb{Q}$ (b) $[0,\infty)$
(c) $[0,1]$ (d) $\mathbb{R}$

10. M என்னும் மெட்ரிக் வெளி, தொடர்புடைய கச்சிதமான மெட்ரிக் வெளியாக இருக்கவேண்டுமெனில், அதன் ஒவ்வொரு தொடர்வரிசையும், ஒரு ஐக் கொண்டிருக்க வேண்டும்

- (அ) விரியும் உள்ள தொடர் வரிசை
(ஆ) குவியும் உள்தொடர் வரிசை
(இ) காஷி உள்தொடர் வரிசை
(ஈ) வரம்புடைய உள்தொடர் வரிசை

A metric space M is said to be sequentially compact if every sequence in M has a

- (a) divergent subsequence
- (b) convergent subsequence
- (c) cauchy subsequence
- (d) bounded subsequence

PART B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) Q^+ மற்றும் Q எண்ணிடத்தக்கவை என நிரூபி.

Prove that Q^+ and Q are countable.

Or

- (ஆ) M — ஒரு மெட்ரிக் வெளி
 $A_1 \subseteq M_1 \subseteq M$. A_1 என்பது M_1 ன் திறந்த
 உட்கணமாக இருக்க இருத்தல் மட்டும் A என்ற ஒரு
 திறந்த உட்கணம் M -ல் $A_1 = A \cap M_1$ என
 கிடைக்கும்

Let M be a metric space and $A_1 \subseteq M_1 \subseteq M$.
 Then prove that A_1 is open in M_1 iff there
 exists an open set A in M such that
 $A_1 = A \cap M_1$.

12. (அ) கணத்தின் உட்பகுதி வரையறு. அது ஒரு கணத்தின்
 உள்ளே மிகப்பெரிய திறந்த உட்கணமென நிரூபி.

Define the interior of a set and prove that it
 is the largest open set contained in that set.

Or

- (ஆ) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ என நிரூபி.

Prove that $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ where A, B are
 subsets R .

13. (அ) தொடர்ச்சியான சாப்பை வரையறு. ஒரு தனித்த
 மெட்ரிக் வெளியின் மீது வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு
 சார்பு தொடர்ச்சியானது என நிரூபி.

Define a continuous function. Prove that any
 function defined on a discrete space is
 continuous.

Or

- (ஆ) வரையறு:

- (i) முழு கோர்த்தல் சார்பு
- (ii) சம அளவு சார்பு ஒவ்வொரு முழு கோர்த்தல்
 சார்பும் சம அளவு சார்பு என நிரூபி.

Define

- (i) homeomorphism
- (ii) isometry. Prove that every isometry is a
 homomorphism.

14. (அ) வரையறு: இணைக்கப்பட்ட கணம். ஒரு புள்ளிக்கு மேல் எந்த தனித்த மெட்ரிக் வெளியும் இணைக்கப்படாதது என நிரூபி.

Define a connected space. Prove that any discrete metric space with more than one point is disconnected.

Or

- (ஆ) $\mathbb{R}$ -ன் இணைக்கப்பட்ட உட்கணம் A எனில், A , ஒரு இடைவெளி என நிரூபி.

If A is a connected subset of $\mathbb{R}$ then show that A must be an interval.

15. (அ) ஒரு மெட்ரிக் வெளியின் கச்சிதமான உட்கணம் முடிய கணம் என நிரூபி.

Prove that any compact subset of a metric space is closed.

Or

- (ஆ) l_2 -ல் முடிய வரம்புடைய கச்சிதமில்லாத உட்கணத்தை எடுத்துக்காட்டுக.

Give an example of a closed and bounded subset of l_2 which is not compact.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) $(0,1]$ எண்ணிடத்தக்கதல்ல எனக்காட்டு.

Show that $(0,1]$ is uncountable.

Or

- (ஆ) M ஒரு மெட்ரிக் வெளி M_1 உட்கவெளி $A_1 \subseteq M_1$

- (i) M_1 -ல் A_1 திறந்த கணமாக இருக்க இருந்தால் மட்டும் M -ல் A என்ற திறந்தகணம் $A_1 = A \cap M_1$ ஆக கிடைக்கும் என நிரூபி.

- (ii) M_1 -ல் திறந்தகணம் A_1 , M லும் திறந்த கணமாக இருக்க இருந்தால் மட்டும் M_1 M -ல் திறந்தகணமாக இருக்க வேண்டு என நிரூபி.

Let M be a metric space and M_1 be a subspace of M . Let $A_1 \subseteq M_1$ prove that

- (i) A_1 is open in M_1 iff there exists an open set A in M such that $A_1 = A \cap M_1$
- (ii) Every open subset A_1 of M_1 is open in M iff M_1 itself is open in M .

17. (அ) M ஒரு மெட்ரிக் வெளி, $A \subseteq M$. கீழ்க்காணும் அனைத்தும் சமம் எனக்காட்டு
- (i) A அடர்த்தியான உட்கணம்.
 - (ii) A -ஐ அடக்கியுள்ள முடிய கணம் M மட்டும்.
 - (iii) A -ஐ வெட்டாத திறந்த கணம் ϕ மட்டும்.
 - (iv) A ஒவ்வொரு வெற்றற்ற திறந்த கணத்தை வெட்டும்.
 - (v) A ஒவ்வொரு திறந்த பந்தையும் வெட்டும்.

Let M be a metric space and $A \subseteq M$. Show that the following are equivalent

- (i) A is dense in M
- (ii) The only closed set which contains A is M .
- (iii) The only open set disjoint from A is ϕ .
- (iv) A intersects every non-empty open set.
- (v) A intersects every open ball

Or

- (ஆ) M ஒரு மெட்ரிக் வெளி $A \subseteq M$. A எங்கும் அடர்த்தான எனில் ஒவ்வொரு வெற்றற்ற திறந்த கணத்தினுள், ஒருவெற்றற்ற திறந்த உட்கணம் $\bar{A}$ -ஐ வெட்டாமல் கிடைக்கிறது என நிரூபி.

Let M be a metric space and $A \subseteq M$. Then show that if A is nowhere dense. Each non empty open set has a non-empty open subset disjoint from $\bar{A}$.

18. (அ) $f: M_1 \rightarrow M_2$ ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பாக இருந்தால் மட்டும் ஒவ்வொரு திறந்த உட்கணத்தின் பிரதி பிம்பமும் திறந்த உட்கணமாக இருக்கும் என நிரூபி.

Show that $f: M_1 \rightarrow M_2$ is continuous iff inverse image of every open set is open.

Or

- (ஆ) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $r > 0$ $E_r = \{a \in \mathbf{R} / w(f.a) \geq \frac{1}{r}\}$ ஒரு மூடியகணம் என்ற $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, என்ற சார்பின் தொடர்ச்சியில்லாத புள்ளிகளை F_σ மாதிரி என நிரூபி.

For any function $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ show that for any $r > 0$ $E_r = \{a \in \mathbf{R} / w(f.a) \geq \frac{1}{r}\}$ is a closed set.

Show that the set of points of discontinuities of any function $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ is of type F_σ .

19. (அ) M இணைக்கப்பட்டதாக இருக்க இருந்தால் மட்டும் M -லிருந்த தனித்த மெட்ரிக் வெளி $\{0,1\}$ க்கு ஒரு மேலான தொடர்ச்சியான சார்பு கிடையாது என நிரூபி.

A metric space M is connected iff there does not exist a continuous function f from M onto the discrete metric space $\{0,1\}$

Or