(ஆ) (i) C என்பது $x^2 + y^2 = 1$ என்ற வட்டம் எனில், $\int_C (x-2y)\,dx + x\,dy$ என்ற தொகையீடு கிரீன் தேற்றத்தை நிவர்த்தி செய்யும் என்பதை சரிபார்க்கவும்.

(ii) $\vec{A} = M\vec{i} + N\vec{j}$ எனில், தள கிரீன் தேற்றத்தை கீழ்கண்டவாறு எழுத முடியும் என்பதைக் காண்பிக்கவும்.

$$\int_C \vec{A}.\,d\vec{r} = \iint_R \left(\nabla \times \vec{A}\right).\vec{k}\,dx\,dy.$$

(i) Verify Green's theorem for $\int_C (x-2y)\,dx + x\,dy$, where C is the circle $x^2 + y^2 = 1$.

(ii) Show that Green's theorem is plane can be expressed in the form $\int_C \vec{A}.\,d\vec{r} = \iint_R \left(\nabla \times \vec{A}\right).\vec{k}\,dx\,dy$, where $\vec{A} = M\vec{i} + N\vec{j}$.

Reg. No. : ....

Code No. : 20822 **Sub. Code : GMMA 21/ GMMC 21**

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2015.

Second Semester

Mathematics — Main

VECTOR CALCULUS

(Also common to Maths with Computer Applications)

(For those who joined in July 2012 onwards)

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer :

1. e என்ற மாறக்கூடிய ஓரலகு வெக்டர் ஐ சார்ந்து இருப்பின், e மற்றும் $\frac{de}{du}$ இடையே உள்ள கோணம்

(அ) $-\pi$ (ஆ) 0

(இ) π (ஈ) $\frac{\pi}{2}$

If e is a variable unit vector depending on u, then the angle between e and $\frac{de}{du}$

(a) $-\pi$ (b) 0

(c) π (d) $\frac{\pi}{2}$

2. திசை வகைக்கெழு உச்ச அளவாக இருக்க, அது மேற்பரப்பு செங்குத்து மீது ஏற்படுத்தும் கோணம்

(அ) 0

(ஆ) $\frac{\pi}{2}$

(இ) π

(ஈ) இவைகள் யாவும் இல்லை

The directional derivative is maximum when the angle made by it with the normal to the surface is

(a) 0 (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) π (d) None of these

3. வெக்டர் $3x\vec{i}+(x+y)\vec{j}-az\vec{k}$ சொலினாய்டல் ஆக இருப்பின் a இன் மதிப்பு

(அ) 3 (ஆ) 4

(இ) 5 (ஈ) 6

If the vector $3x\vec{i}+(x+y)\vec{j}-az\vec{k}$ is solenoidal, then the value of a is

(a) 3 (b) 4

(c) 5 (d) 6

4. $\bar{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ எனில் $\nabla\times(r^n\,\bar{r})$ இன் மதிப்பு

(அ) 0 (ஆ) 1

(இ) 2 (ஈ) 3

If $\bar{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, then $\nabla\times(r^n\,\bar{r})$ is

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 3

5. $x^2+y^2=4$, $z=0$, $z=3$ என்ற உருளையின் வளைமேற்பரப்பின் மீது உள்ள ஓர் அலகு செங்குத்து வெக்டர்

(அ) $x\vec{i}+y\vec{j}$

(ஆ) $\frac{x\vec{i}+y\vec{j}}{2}$

(இ) $\frac{x\vec{i}+y\vec{j}}{3}$

(ஈ) இவைகள் யாவும் இல்லை

The unit vector normal to curved surface of the cylinder $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ and $z = 3$ is

(a) $x\vec{i} + y\vec{j}$ (b) $\frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{2}$

(c) $\frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{3}$ (d) None of these

6. எந்த அடைபட்ட வளைவரையின் மீதும், $\int \bar{r}.d\bar{r}$ இன் மதிப்பு.

(அ) 0 (ஆ) 2π

(இ) $-\pi$ (ஈ) π

The value of $\int \bar{r}.d\bar{r}$ along any closed curve is

(a) 0 (b) 2π

(c) $-\pi$ (d) π

7. S என்பது $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ என்ற கோளம் எனில் $\iint_s \bar{r}.\,ds$ இன் மதிப்பு

(அ) 36π (ஆ) 81π

(இ) 108π (ஈ) 120π

If S is the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, then $\iint_s \bar{r}.\,ds$ is

(a) 36π (b) 81π

(c) 108π (d) 120π

8. கன அளவு V உள்ள பரப்புடத்தைக் கொண்டுள்ள அடைப்பட்ட மேற்பரப்பு S இல், $\iint_S \left(ax\vec{i} + by\vec{j} + cz\vec{k}\right) ds$ இன் மதிப்பு

(அ) $abc\,V$ (ஆ) $(a+b+c)V$

(இ) $3(a+b+c)V$ (ஈ) $3\,abcV$

For a closed surface S enclosing a region of volume V, $\iint_S \left(ax\vec{i} + by\vec{j} + cz\vec{k}\right) ds$ is

(a) $abc\,V$ (b) $(a+b+c)V$

(c) $3(a+b+c)V$ (d) $3\,abcV$

9. $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ என்ற வட்டத்தைக் கொண்டுள்ள $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ என்ற மேல் அரைக் கோளத்தின் மீது உள்ள $A = y\vec{i} + 2y\vec{j} + y^2\vec{k}$ என்ற வெக்டருக்கு, $\int_C A.d\bar{r}$ இன் மதிப்பு

(அ) 0 (ஆ) $-\pi$

(இ) π (ஈ) 2π

For $A = y\vec{i} + 2y\vec{j} + y^2\vec{k}$ taken over the upper half of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$ and the bounding circle $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $\int_C A.d\bar{r}$ is

(a) 0 (b) $-\pi$

(c) π (d) 2π

10. $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ என்ற நீள்வட்டத்தின் பரப்பளவு

(அ) πa^2 (ஆ) πb^2

(இ) πab (ஈ) $\pi(a^2 + b^2)$

The area of the ellipse $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ is

(a) πa^2 (b) πb^2

(c) πab (d) $\pi(a^2 + b^2)$

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) t, n, b என்ற ஒரு அலகு வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ளன. இவைகளின் திசைகள், திசையிலி மாறி u ஐப் பொறுத்து மாறக்கூடியது. u' என்பது u ஐப் பொறுத்து வகையிடத்தக்கது எனில், t', n', b' ஆகியன ஒரே தளத்தில் இருக்கும் எனக்காண்க.

t, n, b are three mutually perpendicular unit vectors whose directions vary with a scalar variable u. Show that t', n', b' are coplanar, where the dash denotes differentiation with respect to u.

Or

(ஆ) $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 6ab$ என்ற மேற்பரப்பில், $(2, 0, 1)$ என்ற புள்ளியில் ஒரு அலகு செங்குத்து வெக்டரைக் காண்க.

Find the unit vector normal to the surface $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 6ab$ at $(2, 0, 1)$.

12. (அ) $\bar{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ மற்றும் $|\bar{r}| = r$ எனில் $\nabla.(f(r)\bar{r}) = rf'(r) + 3f(r)$ என நிறுவுக.

If $\bar{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ and $|\bar{r}| = r$, show that $\nabla.(f(r)\bar{r}) = rf'(r) + 3f(r)$.

Or

(ஆ) $\vec{V} = V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}$ மற்றும் $\bar{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ எனில் $(V.\nabla)\,\bar{r} = -2\vec{V}$ என நிறுவுக.

Show that $(V.\nabla)\,\bar{r} = -2\vec{V}$, where $\vec{V} = V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}$, $\bar{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

(அ) $\vec{F} = (2xy + z^2)\vec{i} + x^2\vec{j} + +3xz^2\vec{k}$ என்ற வெக்டர் பாதுகாப்பானது என – காண்பி மற்றும் $(1,-2,1)$, $(3,1,4)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கக்கூடிய ஏதாவது ஒரு வளைவரையின் மீது $\int \vec{F}.d\vec{r}$ இன் மதிப்பைக்ப காண்க.

Show that $\vec{F} = (2xy + z^2)\vec{i} + x^2\vec{j} + +3xz^2\vec{k}$ is conservative and evaluate $\int \vec{F}.d\vec{r}$ along any curve joining $(1,-2,1)$ to $(3,1,4)$

Or

(ஆ) S என்பது, $(0, 0, 0)$ இதிலிருந்து $\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ வரை உள்ள $y^2 = 2x$, $z = 0$ என்ற பரவளைவின் வில் வளைவு மற்றும் $\vec{A} = 2xy\vec{i} + y\vec{j} + xz\vec{k}$ எனில், $\int \vec{A}.\, ds$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

If $\vec{A} = 2xy\vec{i} + y\vec{j} + xz\vec{k}$ and if S is the arc of the parabola $y^2 = 2x$, $z = 0$ from $(0, 0, 0)$ to $\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$, evaluate $\int \vec{A}.\, ds$.

14. (அ) S என்பது $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$ ஆகியவற்றால் அடைக்கப்பட்டுள்ள கனசதுரத்தின் மேற்பரப்பு மற்றும் $\vec{A} = 4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}$ எனில் $\iint_S \vec{A}.\, d\vec{s} = \frac{3}{2}$ என காண்பிக்கவும்.

Show that $\iint_S \vec{A}.\, d\vec{s} = \frac{3}{2}$ if $\vec{A} = 4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}$ and S is the surface of the cube bounded by $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

Or

(ஆ) $\vec{A} = xz\vec{i} - yz\vec{j} + 2z^2\vec{k}$ மற்றும் S என்பது $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $4x + 2y + z = 8$ என்ற மேற்பரப்புகளைக் கொண்டுள்ள மேற்பரப்பு எனில் $\iint_S \vec{A}.d\vec{s}$, இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

Evaluate $\iint_S \vec{A}.d\vec{s}$, where $\vec{A} = xz\vec{i} - yz\vec{j} + 2z^2\vec{k}$ and S if the surface bounded by the surfaces $x = 0, y = 0, z = 0$, $4x + 2y + z = 8$.

15. (அ) $\overline{A} = y\vec{i} + 2yz\vec{j} + y^2\vec{k}$ மற்றும் S என்பது $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$ என்ற அரைக்கோளத்தின் மேற்பரப்பு எனில் $\iint_s (\nabla \times \vec{A}).dS$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

If $\overline{A} = y\vec{i} + 2yz\vec{j} + y^2\vec{k}$, evaluate the integral $\iint_s (\nabla \times \vec{A}).dS$, where S is the upper half of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$.

Or

(ஆ) $\vec{A} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ மற்றும் S என்பது $x^2 + y^2 = 1 - z,\ z \geq 0$ என்ற கன பரவளையின் மேற்பரப்பு எனில் $\iint_s (\nabla \times \vec{A}).\,dS$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

Evaluate $\iint_s (\nabla \times \vec{A}).\,dS$, if $\vec{A} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$, where S is the paraboloidal surface $x^2 + y^2 = 1 - z,\ z \geq 0$.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) $\nabla\phi = (y + y^2 + z^2)\vec{i} + (x + z + 2xy)\vec{j} + (y + 2zx)\vec{k}$ மற்றும் $\phi(1, 1, 1) = 3$ எனில், ϕ இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

If $\nabla\phi = (y + y^2 + z^2)\vec{i} + (x + z + 2xy)\vec{j} + (y + 2zx)\vec{k}$ and if $\phi(1, 1, 1) = 3$, find ϕ.

Or

(ஆ) (i) $\nabla\phi = (2x + 3y + 4xy^2)\vec{i} + (3x + 3y^2 + 4x^2y + z + 1)\vec{j} + (y + 2)\vec{k}$ எனில் ϕ இன் மதிப்பைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

(ii) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ மற்றும் $r = |\vec{r}|$ எனில் $\nabla(\log r) = \frac{\vec{r}}{r^2}$ என நிரூபிக்கவும்.

(i) If $\nabla\phi = (2x + 3y + 4xy^2)\vec{i} + (3x + 3y^2 + 4x^2y + z + 1)\vec{j} + (y + 2)\vec{k}$, find ϕ.

(ii) If $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ and $|\vec{r}| = r$, prove that $\nabla(\log r) = \frac{\vec{r}}{r^2}$.

. (அ) (i) $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, எனில், எல்லா $f(r)$ க்கும், $\nabla \times \{f(r)\bar{r}\} = 0$ எனக் காண்பிக்கவும்.

(ii) $\bar{v} = \bar{w} \times \bar{r}$, $\bar{w}$ என்பது மாறாத வெக்டர், மற்றும் $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, எனில், $\frac{1}{2}\text{curl } \bar{v} = \bar{w}$ எனக் காண்பிக்கவும்.

(iii) ϕ என்பது இசைச்சார்பு எனில், $\nabla\phi$ என்பது சொலினாய்டல் எனக் காண்பிக்கவும்.

(i) If $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, for all $f(r)$, show that $\nabla \times \{f(r)\bar{r}\} = 0$

(ii) If $\bar{v} = \bar{w} \times \bar{r}$, where $\bar{w}$ is a constant vector and $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, show that $\frac{1}{2}\text{curl } \bar{v} = \bar{w}$.

(iii) If ϕ is a harmonic function, show that $\nabla\phi$ is solenoidal.

Or

(ஆ) (i) எந்த ஒரு வெக்டர் $\vec{V}$ க்கும், $\nabla.(\nabla \times \bar{v}) = 0$ எனக்காண்பிக்கவும்.

(ii) $\vec{V} = v_1\bar{i} + v_2\bar{j} + v_3\bar{k}$ மற்றும் $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ எனில், $(\bar{v} \times \nabla) \times \bar{r} = -2\bar{v}$ எனக்காண்பிக்கவும்.

(i) Show that $\nabla.(\nabla \times \bar{v}) = 0$ for any vector $\vec{V}$.

(ii) If $\vec{V} = v_1\bar{i} + v_2\bar{j} + v_3\bar{k}$ and $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ then show that $(\bar{v} \times \nabla) \times \bar{r} = -2\bar{v}$.

18. (அ) $\vec{A} = z\bar{i} + x\bar{j} - y^2z\bar{k}$ மற்றும் s என்பது $z = 0$ மற்றும் $z = 2$ என்ற தளங்களுக்கு இடையே உள்ள முதல் அரைக்கால் வளாகத்தில் உள்ள $x^2 + y^2 = 1$ என்ற உருளையின் மேற்பரப்பு எனில் $\iint_s \vec{A}.\bar{n}\, ds$ இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

Evaluate $\iint_s \vec{A}.\bar{n}\, ds$, if $\vec{A} = z\bar{i} + x\bar{j} - y^2z\bar{k}$ and s is the surface of the cylinder $x^2 + y^2 = 1$ in the first octant between the planes $z = 0$ and $z = 2$.

Or

(ஆ) $\vec{A} = x\bar{i} + y\bar{j} - 2z\bar{k}$ மற்றும் s என்பது, xy தளத்திற்கு மேல் உள்ள $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ என்றக் கோளத்தின் மேற்பரப்பு எனில் $\iint_s \vec{A}.\bar{n}\, ds$ இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

Evaluate $\iint_s \vec{A}.\bar{n}\, ds$, if $\vec{A} = x\bar{i} + y\bar{j} - 2z\bar{k}$ and s is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ above the xy plane.

19. (அ) S என்பது அடைபட்ட மேற்பரப்பு மற்றும் $\bar{r}$ என்பது 0 என்ற புள்ளியை ஆதாரமாகக் கொண்டுள்ள பொதுப்புள்ளியின் நிலைவெக்டர். 0 என்ற புள்ளி S இன் உள்ளே இருக்கும் போது $\iint_s \frac{\bar{r}}{r^3}.ds$ இன் மதிப்பு பூச்சியம் எனவும், 0 என்ற புள்ளி S ற்கு வெளியே இருப்பின் $\iint_s \frac{\bar{r}}{r^3}.ds$ இன் மதிப்பு 4π எனவும் காண்பிக்கவும்.

If S is a closed surface and $\bar{r}$, the position vector of a general point with 0 as the point of reference, show that $\iint_s \frac{\bar{r}}{r^3}.ds$ is equal to

(i) zero, when 0 lies outside S and

(ii) 4π, when 0 lies inside S.

Or

(ஆ) (i) $\vec{A} = xz\vec{i} - yz\vec{j} + 2z^2\vec{k}$ மற்றும் S என்பது $x = 0, y = 0, y = 3, z = 25, z = x^2$ என்ற மேற்பரப்புகளை எல்லைகளாகக் கொண்டுள்ள பரப்பிடம் எனில், $\iint_S \vec{A}.ds$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ மற்றும் அடைப்பட்ட மேற்பரப்பு S இல், $\iint_S (\nabla r^2.ds) = 6V$, என நிறுவுக.

(i) Evaluate $\iint_S \vec{A}.ds$, where $\vec{A} = xz\vec{i} - yz\vec{j} + 2z^2\vec{k}$ and S is the region bounded by the surfaces $x = 0, y = 0, y = 3, z = 25, z = x^2$

(ii) Prove that $\iint_S (\nabla r^2.ds) = 6V$, for a closed surface S and $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

20. (அ) C என்பது, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ ஆகியவற்றால் உள்ளடக்கப்பட்ட R என்ற பரப்பிடத்தின் வரம்பு எனில், $\int_c (3x^2 - 8y^2)\,dx + (4y - 6xy)\,dy$ என்பதை தொகையீடு கிரீன் தேற்றத்தை நிவர்த்திச் செய்யும் என்பதை சரிபார்க்கவும்.

Verify Green's theorem for $\int_c (3x^2 - 8y^2)\,dx + (4y - 6xy)\,dy$, where C is the boundary of the region R enclosed by $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

Or