19. (அ) C என்பது $|z|=3$ எனில் $\int_C \frac{e^z}{(z+2)(z+1)^2}\,dz$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

Evaluate $\int_C \frac{e^z}{(z+2)(z+1)^2}\,dz$ where C is $|z|=3$.

Or

(ஆ) $f(z)=\frac{z-1}{z+1}$ என்ற சார்பை (i) $z=0$ என்ற புள்ளியைச் சுற்றியும், (ii) $z=1$ என்ற புள்ளியைச் சுற்றியும், டெய்லரின் தொடரில் விரித்து எழுதுக. மேலும், குவியும் பகுதியை (i)-க்கும் (ii)-க்கும் கண்டுபிடி.

Expand $f(z)=\frac{z-1}{z+1}$ as a Taylor's series (i) about the point $z=0$ (ii) about the point $z=1$. Determine the region of convergence in each case.

20. (அ) ரூச்செஸ்-சின் தேற்றத்தைக் கூறி அதை நிரூபி.

State and prove Rouche's theorem.

Or

(ஆ) $\frac{1}{z-\sin z}$ ன் முனைகளையும், எச்சங்களையும் காண்க.

Find the poles and residues of $\frac{1}{z-\sin z}$.

Reg. No. : ....

Code No. : 20828 **Sub. Code : GMMA 61/ GMMC 61**

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2018.

Sixth Semester

Mathematics/Maths with CA — Main

COMPLEX ANALYSIS

(For those who joined in July 2012-2015)

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer :

1. $|z|=1$, என்ற வட்டத்தைப் பொறுத்து a -ன் நேர்மாறு

(அ) a (ஆ) $1/a$

(இ) $\bar{a}$ (ஈ) $1/\bar{a}$

In the circle $|z|=1$, the inverse of a is

(a) a (b) $1/a$

(c) $\bar{a}$ (d) $1/\bar{a}$

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

2. $\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{3/4}$ -ன் மூலங்களின் எண்ணிக்கை

(அ) 3 (ஆ) 2

(இ) 4 (ஈ) 1

The number of values of $\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{3/4}$ is

(a) 3 (b) 2

(c) 4 (d) 1

3. $f(z)=u+iv$ என்ற பகுமுறைச் சார்பின் மெய், கற்பனைப் பகுதிகள்

(அ) பகுமுறைச் சார்புகள்

(ஆ) நேரிய உருமாற்றம்

(இ) இசைச் சார்புகள்

(ஈ) எதுவுமே இல்லை

The real and imaginary parts of the analytic function $f(z)=u+iv$ are

(a) analytic (b) conformal

(c) harmonic (d) none

4. $\lim_{z\to 1+i}(z^2-5z+10) =$ ________.

(அ) $5-3i$ (ஆ) $15-3i$

(இ) $7i+5$ (ஈ) $-3i-15$

$\lim_{z\to 1+i}(z^2-5z+10) =$ ________.

(a) $5-3i$ (b) $15-3i$

(c) $7i+5$ (d) $-3i-15$

5. $(z, -1, 0, 1)$ -ன் மதிப்பு

(அ) $\frac{z}{1-z}$ (ஆ) $\frac{-2z}{z-1}$

(இ) $\frac{2z}{1+z}$ (ஈ) $\frac{2z}{z-1}$

The value of $(z, -1, 0, 1)$ is = ________.

(a) $\frac{z}{1-z}$ (b) $\frac{-2z}{z-1}$

(c) $\frac{2z}{1+z}$ (d) $\frac{2z}{z-1}$

6. $w=z+b$ -ன் நிலைப்புள்ளிகள் $z=$ ________.

(அ) 0 (ஆ) ∞

(இ) 0 மற்றும் ∞ (ஈ) 1

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

The fixed points of $w = z + b$ is $z =$ ______.

(a) 0 (b) ∞

(c) 0 and ∞ (d) 1

7. C என்பது $|z| = r$ என்ற வட்டம் எனில், $\int_C \frac{dz}{z}$ -ன் மதிப்பு

(அ) πi (ஆ) $2\pi i$

(இ) 2π (ஈ) π

If C is the circle $|z| = r$, then the value of $\int_C \frac{dz}{z}$ is

(a) πi (b) $2\pi i$

(c) 2π (d) π

8. மொரைராவின் தேற்றத்தில் உள்ள கட்டுப்பாடு

(அ) $\int_C f(z)\, dz = 0$ (ஆ) $f(z) =$ மாறிலி

(இ) $\int_C \frac{f(z)}{z} dz = 0$ (ஈ) $\int_C f(z)\, dz \neq 0$

The condition for Morera's theorem is

(a) $\int_C f(z)\, dz = 0$ (b) $f(z) =$ constant

(c) $\int_C \frac{f(z)}{z} dz = 0$ (d) $\int_C f(z)\, dz \neq 0$

9. $f(z)$ என்ற சார்பில் 'a' என்ற தனித்த மடிப்புப் புள்ளி ஒரு துருவம் $\Leftrightarrow \lim_{z \to a} f(z) =$ ______.

(அ) ∞ (ஆ) 0

(இ) 1 (ஈ) -1

An isolated singularity 'a' of $f(z)$ is a pole $\Leftrightarrow \lim_{z \to a} f(z) =$ ______.

(a) ∞ (b) 0

(c) 1 (d) -1

10. $z = 0$ என்னும் புள்ளியில் $\cot z$ -ன் எச்சம்

(அ) π (ஆ) πi

(இ) 0 (ஈ) 1

The residue of $\cot z$ at $z = 0$ is

(a) π (b) πi

(c) 0 (d) 1

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

PART B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11\. (அ) z_1 மற்றும் z_2 ஆகியன இரு சிக்கல் எண்கள் எனில், $(z_1, z_2 \neq 0)$ $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$ என நிரூபி.

If z_1 and z_2 are any two non-zero complex numbers, prove that $(z_1, z_2 \neq 0)$ $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$.

Or

(ஆ) $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாட்டின் மூலம் 'α' எனில், $\overline{\alpha}$ -ம் அதன் மூலம் என நிரூபி. $(a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ a_0 \neq 0)$.

If α is a root of the polynomial equation $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0$ where $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ and $a_0 \neq 0$, prove that $\overline{\alpha}$ is also a root.

12\. (அ) $f(z) = e^{-x}(\cos y - \sin y)$ என்ற சார்பிற்கு $C-R$ சமன்பாடுகளைச் சரிபார்க்க.

Verify $C-R$ equations for the function $f(z) = e^{-x}(\cos y - \sin y)$.

Or

(ஆ) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ என்பது ஒரு பகுமுறைச் சார்பு மற்றும் $u(x, y) = \frac{\sin 2x}{\cosh 2y + \cos 2x}$ எனில், $f(z)$ -ஐக் கண்டுபிடி.

If $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ is an analytic function and $u(x, y) = \frac{\sin 2x}{\cosh 2y + \cos 2x}$, find $f(z)$.

13\. (அ) $z = 2, i, -2$ என்ற z-தள புள்ளிகளை முறையே $w = 1, i, -1$ என்ற w – தள புள்ளிகளுக்கு சேர்க்கும் இருபடி நேரிய உருமாற்றத்தைக் காண்க.

Find the bilinear transformation which maps the points $z = 2, i, -2$ of the z-plane onto the points $w = 1, i, -1$ of the w-plane.

Or

(ஆ) $w = \frac{1}{z}$ என்ற சார்பு எதிர்வு மற்றும் பிரதிபலிப்பு ஆகியவற்றின் சேர்வுகள் எனக் காட்டுக.

Show that the mapping $w = \frac{1}{z}$ is a combination of inversion and reflection.

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

14. (அ) $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$ எனக் காட்டுக.

Prove that $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$.

Or

(ஆ) மீப்பெருமட்டுத் தேற்றத்தைக் கூறி அதனை நிரூபி.

State and prove maximum modulus theorem.

15. (அ) $|z|<1$ எனில் $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(2-z)}$ சார்பை லாரண்ட் தொடரில் விரித்து எழுதுக.

Expand $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(2-z)}$ is a Laurent's series valid for $|z|<1$.

Or

(ஆ) லாரண்ட்-ன் தொடரைப் பயன்படுத்தி $z=1$-ல் $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$-ன் எச்சத்தைக் காண்க.

Use Laurent's series to find the residue of $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$ at $z=1$.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) z_1, z_2, z_3 என்ற புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் முனைகள் எனில் $z_1^2+z_2^2+z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$ என நிறுவுக.

If the points z_1, z_2, z_3 are the vertices of an equilateral triangle, prove that $z_1^2+z_2^2+z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$.

Or

(ஆ) z_1 மற்றும் z_2 என்ற புள்ளிகள் $\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+\beta=0$ என்ற கோட்டிற்கு பிரதிபலிப்பு புள்ளிகளாக இருக்கத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $\bar{\alpha}z_1+\alpha\bar{z}_2+\beta=0$ என நிறுவுக.

Prove that z_1 and z_2 are reflection points for the line $\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+\beta=0$ iff $\bar{\alpha}z_1+\alpha\bar{z}_2+\beta=0$.

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam

17. (அ) $f(z)=\begin{cases} \dfrac{x^3(1+i)-y^3(1-i)}{x^2+y^2} & \text{if } z\neq 0 \\ 0 & \text{if } z=0 \end{cases}$ என்ற சார்பு

$C-R$ சமன்பாடுகளை ஆதிப்புள்ளியில் பூர்த்தி செய்கிறது என்றும் $z=0$ என்ற புள்ளியில் $f'(z)$ வகையிடத்தக்கதாக இல்லை எனவும் நிரூபி.

Prove that the function $f(z)=\begin{cases} \dfrac{x^3(1+i)-y^3(1-i)}{x^2+y^2} & \text{if } z\neq 0 \\ 0 & \text{if } z=0 \end{cases}$ satisfies $C-R$ equations at the origin but $f'(z)$ does not exists at $z=0$.

Or

(ஆ) $u(x,y)=e^{-x}\{(x^2-y^2)\cos y+2xy\sin y\}$ என்பது $f(z)$ என்ற பகுமுறைச் சார்பின் மெய்ப் பகுதியாக இருப்பின் $f(z)$-ஐக் காண்க.

Find the analytic function $f(z)$ if its real part is $u(x,y)=e^{-x}\{(x^2-y^2)\cos y+2xy\sin y\}$.

18. (அ) மெய் அச்சுவையும், $|w|=1$ என்ற ஓரலகு வட்டத்தையும் சேர்க்கும் எந்த இருபடி மாற்றமும் $w=e^{i\lambda}\left(\dfrac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}\right)$ (λ ஒரு மெய்) என்ற உருவில் எழுத முடியும் என நிரூபி. மேலும், இந்த இருபடி மாற்றம் மேல் அரைத்தளம் $\text{Im}\, z\geq 0$-ஐ ஓரலகு வட்டத்துடன் $|w|\leq 1$ சேர்க்கத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $\text{Im}\,\alpha>0$ என நிரூபி.

Any bilinear transformation which maps the real axis onto unit circle $|w|=1$ can be written in the form $w=e^{i\lambda}\left(\dfrac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}\right)$ where λ is real. Further this transformation maps the upper half plane $\text{Im}\, z\geq 0$ onto the unit circular disc $|w|\leq 1$ iff $\text{Im}\,\alpha>0$.

Or

(ஆ) நான்கு புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தின் மேல் இருக்கும் எனில் அவற்றின் குறுக்கு விகிதம் மெய் என நிரூபி.

Prove that the cross ratio of four points is real when the points lie on a circle.

Nesamony Memorial Christian College, Marthandam