

(ஆ) $0 < x < \pi$ என்ற இடைவெளியில்

$$\pi - x = \frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2x}{1} + \frac{\sin 4x}{2} + \dots \text{ என நிரூபி.}$$

Show that when $0 < x < \pi$;

$$\pi - x = \frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2x}{1} + \frac{\sin 4x}{2} + \dots$$

Reg. No. :

Code No. : 20097

Sub. Code : R 3 MA 11/

R 3 MC 11/B 3 MA 11/

B 3 MC 11

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION,
NOVEMBER 2011.

First Semester

Mathematics — Main

Paper I — CALCULUS

(Also common to B.Sc. Mathematics with Computer
Applications)

(For those who joined in July 2008 and afterwards)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer :

1. d -விட்டம் கொண்ட வட்டத்தின் வளைவு ஆரம்

(அ) d

(ஆ) $\frac{2}{d}$

(இ) $\frac{d}{2}$

(ஈ) $2d$

The radius of curvature of a circle of diameter d is

- (a) d (b) $\frac{2}{d}$
(c) $\frac{d}{2}$ (d) $2d$.

2. $y = f(x)$ என்ற வளைவரையின் வளைவு காண உதவும் சூத்திரம்

(அ) $\frac{(1+y_1^2)^{3/2}}{y_2}$ (ஆ) $\frac{y_2}{(1+y_{12})^{3/2}}$

(இ) $\frac{1+y_1^2}{y_2}$ (ஈ) இவை ஏதுமில்லை.

The formula for curvature of the curve $y = f(x)$ is

(a) $\frac{(1+y_1^2)^{3/2}}{y_2}$ (b) $\frac{y_2}{(1+y_{12})^{3/2}}$

(c) $\frac{1+y_1^2}{y_2}$ (d) none.

3. வளைவரைக்கு ————— தொலைத் தொடுகோடுகள் உண்டு

- (அ) n (ஆ) $n+1$
(இ) $n-1$ (ஈ) இவை ஏதுமில்லை.

General curve of n^{th} degree will have _____ asymptotes

- (a) n (b) $n+1$
(c) $n-1$ (d) none.

4. $f(x, y) = 0$ என்ற வளைவரையின் துணையியப்புள்ளி இரட்டைப் புள்ளி எனில்

- (அ) $f_{xy}^2 > f_{xx}f_{yy}$ (ஆ) $f_{xy}^2 = f_{xx}f_{yy}$
(இ) $f_{xy}^2 < f_{xx}f_{yy}$ (ஈ) இவை ஏதுமில்லை.

For a conjugate point of the curve $f(x, y) = 0$

- (a) $f_{xy}^2 > f_{xx}f_{yy}$ (b) $f_{xy}^2 = f_{xx}f_{yy}$
(c) $f_{xy}^2 < f_{xx}f_{yy}$ (d) none.

5. $(p-r)$ ஆயக்கூறுகளில் வளைவு ஆரம் ρ காண சூத்திரம்

- (அ) $r \frac{dp}{dr}$ (ஆ) $\frac{1}{r} \frac{dr}{dp}$
(இ) $r \frac{dr}{dp}$ (ஈ) இவை ஏதுமில்லை.

The radius of curvature ρ in $(p-r)$ coordinate is

- (a) $r \frac{dp}{dr}$ (b) $\frac{1}{r} \frac{dr}{dp}$
(c) $r \frac{dr}{dp}$ (d) none.

6. $r = e^\theta$ என்ற வளைவரைக்கு $(p-r)$ சமன்பாடு

(அ) $p = \sqrt{2} r$ (ஆ) $p = \frac{1}{\sqrt{2} r}$

(இ) $p = 2r$ (ஈ) $\frac{r}{\sqrt{2}}$

The $(p-r)$ equation of the curve $r = e^\theta$ is

(a) $p = \sqrt{2} r$ (b) $p = \frac{1}{\sqrt{2} r}$

(c) $p = 2r$ (d) $\frac{r}{\sqrt{2}}$

7. $\overline{(n+1)} = \underline{\hspace{2cm}}$

(அ) $(n+1)!$ (ஆ) $(n-1)!$

(இ) $n!$ (ஈ) இவை ஏதுமில்லை.

$\overline{(n+1)} = \underline{\hspace{2cm}}$

(a) $(n+1)!$ (b) $(n-1)!$

(c) $n!$ (d) none.

8. $\beta(m, n)$ ன் மதிப்பானது

(அ) $\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$ (ஆ) $\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{mm}} dx$

(இ) $\int_0^\infty \frac{x^m}{(1+x)^{m+n}} dx$ (ஈ) $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n} dx$

The value of $\beta(m, n)$ is given by

(a) $\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$ (b) $\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{mm}} dx$

(c) $\int_0^\infty \frac{x^m}{(1+x)^{m+n}} dx$ (d) $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n} dx$

9. ஃபூரியர் கெழு a_n ன் மதிப்பு

(அ) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$ (ஆ) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$

(இ) $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin nx dx$ (ஈ) இவை ஏதுமில்லை.

The value of the Fourier coefficient a_n is

(a) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$ (b) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$

(c) $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin nx dx$ (d) none.

10. $f(x) = x$ என்ற சார்புக்கு கெழு a_0 ன் மதிப்பு

(அ) 1 (ஆ) $\frac{2\pi^2}{3}$

(இ) 0 (ஈ) இவை ஏதுமில்லை.

For the function $f(x)=x$, the Fourier coefficient a_0 is

- (a) 1 (b) $\frac{2\pi^2}{3}$
(c) 0 (d) none.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) $x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ என்ற உருள் வளையின் எந்தப்புள்ளியிலும் அதன் வளைவு ஆரம் $4a \cos \theta/2$ எனக் காண்க.

Show that the radius of curvature at any point of the Cycloid

$x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ is $4a \cos \theta/2$.

Or

- (ஆ) $y = c \cosh(x/c)$ ன் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வளைவு ஆரத்தின் மதிப்பு y^2/c என நிரூபிக்க.

Show that the radius of curvature of any point of the catenary $y = c \cosh(x/c)$ is y^2/c .

12. (அ) $y = \frac{\log x}{x}$ என்ற வளைவரைக்கு $x=1$ என்ற இடத்தில் வளைவரையைக் காண்க.

Find the radius of curvature of the curve $y = \frac{\log x}{x}$ at $x=1$.

Or

- (ஆ) $x^2(x-y) + y^2 = 0$ என்ற வளைவரைக்கு இரட்டைப் புள்ளிகளை ஆராய்ந்து அவற்றின் தன்மையைக் குறிப்பிடுக.

Find the position and nature of the double points of the curve $x^2(x-y) + y^2 = 0$.

13. (அ) $\frac{2a}{r} = 1 - \cos \theta$ என்ற பரவளையத்தின் $(p-r)$ சமன்பாட்டைக் காண்க.

Find the $(p-r)$ equation of the parabola $\frac{2a}{r} = 1 - \cos \theta$.

Or

- (ஆ) $r = a(1 + \cos \theta)$ என்ற வளைவரையின் வளைவு ஆரத்தைக் காண்க.

Find the radius of the curvature of the Cardioid $r = a(1 + \cos \theta)$.

14. (அ) $\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx = \beta(m, n)$ என நிரூபிக்க.

Prove that $\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx = \beta(m, n)$.

Or

(ஆ) $n > 1$ எனில் $\overline{\overline{(n)}} = (n-1) \overline{\overline{(n-1)}}$ என நிரூபி.
மேலும் n ஓர் மிகை முழு எண் எனில் $\overline{\overline{(n)}} = \underline{n-1}$ எனக் காட்டுக.

When $n > 1$ prove that $\overline{\overline{(n)}} = (n-1) \overline{\overline{(n-1)}}$ and show that $\overline{\overline{(n)}} = \underline{n-1}$, n is a positive integer.

15. (அ) $(0, \pi)$ என்ற இடைவெளியில் $f(x) = \pi - x$ என்ற சார்பின் ஃபூரியர், கொசைன் தொடர் வரிசையைக் காண்க.

Find the Fourier sine series for the function $f(x) = \pi - x$ in the range $(0, \pi)$.

Or

(ஆ) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{if } -\pi < x < 0 \\ x & \text{if } 0 < x < \pi \end{cases}$ எனில் இடைவெளி

$(-\pi, \pi)$ ல் ஃபூரியர் கெழுவைக் காண்.

Obtain the Fourier coefficients

$f(x) = \begin{cases} -x & \text{if } -\pi < x < 0 \\ x & \text{if } 0 < x < \pi \end{cases}$ in the interval $(-\pi, \pi)$

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் வளைவு மையப்பாதையைக் காண்க.

Find the evaluate of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Or

(ஆ) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ என்ற வளைவரைக்கு (x, y) என்ற புள்ளியில் வளைவு மையத்தைக் காண்க.

Find the centre of curvature of the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ at the point (x, y) .

17. (அ) $x^4 - 2x^2y - xy^2 - 2x^2 - 2xy - x + 2y + 1 = 0$

என்ற வளைவரைக்கு $(0, -1)$ என்ற புள்ளியில் இரண்டாம் வகையைச் சார்ந்த ஒரு ஒற்றை 'கஸ்ப்' உண்டு எனக் காண்க.

Show that the curve

$$x^4 - 2x^2y - xy^2 - 2x^2 - 2xy - x + 2y + 1 = 0$$

has a single cusp of the second kind at $(0, -1)$.

Or

(ஆ) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற வளைவரைக்கு தொலைத் தொடுகோடுகளைக் காண்க.

Find the asymptotes of the hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

18. (அ) $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ என்ற வளைவரைக்கு $(p - r)$ சமன்பாட்டைக் காண்க.

Find the $(p - r)$ equation of $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$.

Or

(ஆ) $r = e^\theta \cot \alpha$ என்ற வளைவரைக்கு $(p - r)$ சமன்பாட்டைக் காண்க.

Find the $(p - r)$ equation of the curve $r = e^\theta \cot \alpha$.

19. (அ) நிறுவுக $2^{2n-1} \Gamma(n) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \Gamma(2n) \sqrt{\pi}$.

Prove that $2^{2n-1} \Gamma(n) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \Gamma(2n) \sqrt{\pi}$.

Or

(ஆ) நிறுவுக $\Gamma(n + 1/2) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Prove that

$$\Gamma(n + 1/2) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}, n = 0, 1, 2, \dots$$

20. (அ) $(-\pi, \pi)$ இடைவெளியில் $f(x) = x^2$ என்ற சார்பின் ஃபூரியர் தொடர் வரிசையைக் காண்க. மேலும் அதிலிருந்து

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots = \frac{\pi}{12} \text{ - ஐ வருவி.}$$

Find the Fourier series for the function $f(x) = x^2$ in the interval $(-\pi, \pi)$ and deduce that

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots = \frac{\pi}{12}.$$

Or